选择公理简述

吴刘臻

中国科学院数学与系统科学研究院

2020 年 12 月 21 日

目录

数学基础与公理集合论

一阶命题逻辑和 Zermelo-Frankel 集合论公理系统是当今数学研究中接受程度最高的数学基础系统。在今天的报告中，我们将预设 Zermelo-Frankel 集合论公理系统作为数学的基础理论。

数学基础与公理集合论

一阶命题逻辑和 Zermelo-Frankel 集合论公理系统是当今数学研究中接受程度最高的数学基础系统。在今天的报告中，我们将预设 Zermelo-Frankel 集合论公理系统作为数学的基础理论。

ZFC 公理系统由一系列公理构成：

- 外延公理
- 配对公理
- 分离公理模式

...

数学基础与公理集合论

一阶命题逻辑和 Zermelo-Frankel 集合论公理系统是当今数学研究中接受程度最高的数学基础系统。在今天的报告中，我们将预设 Zermelo-Frankel 集合论公理系统作为数学的基础理论。

ZFC 公理系统由一系列公理构成：

- 外延公理
- 配对公理
- 分离公理模式

...

- 选择公理

数学基础与公理集合论

一阶命题逻辑和 Zermelo-Frankel 集合论公理系统是当今数学研究中接受程度最高的数学基础系统。在今天的报告中，我们将预设 Zermelo-Frankel 集合论公理系统作为数学的基础理论。

ZFC 公理系统由一系列公理构成：

- 外延公理
- 配对公理
- 分离公理模式

...

- 选择公理

ZFC 公理系统中有少数几条公理具有不小争议，选择公理就是其中之一。

选择公理

Zermelo 选择公理

$$\forall X[\emptyset \notin X \Rightarrow \exists f : X \to \bigcup X \forall A \in X(f(A) \in A)]$$

选择公理

Zermelo 选择公理

$$\forall X[\emptyset \notin X \Rightarrow \exists f : X \to \bigcup X \forall A \in X(f(A) \in A)]$$

换句话说，对任意集族 X，选择公理保证必然存在一个选择函数 f，f 从集族 X 中的每个元素 A 里选出一个元。

"The Axiom of Choice is necessary to select a set from an infinite number of socks, but not an infinite number of shoes." (Bertrand Russell)

选择公理的一些等价形式

下面我们列出选择公理的一些常见等价命题：

- (良序原理 *WO*) 所有集合都可以被良序化。
- (佐恩引理) 在任何一非空的偏序集中，若任何链（即全序的子集）都有上界，则此偏序集内必然存在（至少一个）极大元。
- (Tychonoff 定理) 任意个紧致空间的乘积空间对于乘积拓扑是紧致的。
- (Blass 定理) 所有线性空间都有基。

选择公理的一些重要弱形式

下面我们列出选择公理的一些重要弱形式：

- (依赖选择公理) 对每个非空集合 X 和 X 上二元关系 R，如果对任意 $a \in X$，存在一个 $b \in X$ 使得 aRb，那么存在一个 X 的元素构成的可数序列 $(x_n \mid n \in \omega)$ 使得 $x_n R x_{n+1}$ 对所有 $n \in \omega$ 成立。
- (布尔素理想定理) 所有布尔代数中理想都可以扩张为一个素理想。

选择公理的一些重要弱形式

下面我们列出选择公理的一些重要弱形式：

- (依赖选择公理) 对每个非空集合 X 和 X 上二元关系 R，如果对任意 $a \in X$，存在一个 $b \in X$ 使得 aRb，那么存在一个 X 的元素构成的可数序列 $(x_n \mid n \in \omega)$ 使得 $x_n R x_{n+1}$ 对所有 $n \in \omega$ 成立。
- (布尔素理想定理) 所有布尔代数中理想都可以扩张为一个素理想。

注记：依赖选择公理等价于一阶逻辑的 Loweheim-Skolem 定理。布尔素理想定理等价于一阶逻辑的完备性和紧致性定理。

选择公理的早期编年史

源至 Stanford Encyclopedia of Philosophy：

1904/1908 Zermelo 引入了选择公理，并用其证明了良序原理，这在当时引发了极大争议。

1914 Hausdorff 利用选择公理构造了 Hausdorff 悖论，即一个三维空间的球可被拆成形状大小一致的三分，使得其中一份与另外两份的并大小形状一致。

1922 Fraenkel 引入了“置换法”并证明了选择公理与带原子的公理集合论 ZFA 的独立性。

1924 基于 Hausdorff 的工作, Banach 和 Tarski 用选择公理证明了分球怪论。

1926 Hilbert 在证明论中引入了“超限”或“epsilon”公理，这是选择公理的一个特殊版本。

1936 Lindenbaum 和 Mostowski 深入研究了 Fraenkel 的置换法，从而证明了许多选择公理弱形式与 ZFA 的独立性。

1935–38 Gödel 证明了选择公理相对于 ZF 的一致性。

1950s Mendelson，Shoenfield 和 Specker 利用置换法证明了选择公理与不带原子的 ZF 的弱系统的一致性，在这些模型中良基公理不成立。

1963 Cohen 证明了选择公理相对于 ZF 的独立性。

目录

选择公理与代数

佐恩引理是代数相关学科的基本原理和工具，也是大多数代数学家所认知为直观上正确的结论。下面列举一些代数学中需要使用选择公理的命题。

- (Krull 定理) 所有含幺环都有极大理想。
- 每个域存在一个代数闭包。
- (Nielsen–Schreier 定理) 自由群的子群是自由群。
- 所有线性空间都有基。

选择公理与测度论

在测度论中，选择公理一方面保证了 Lebesgue 测度的基本性质：

Fact

Lebesgue 测度具有可数可加性。

另一方面，选择公理被用于构造不可测集合：

选择公理与测度论

在测度论中，选择公理一方面保证了 Lebesgue 测度的基本性质：

Fact

Lebesgue 测度具有可数可加性。

另一方面，选择公理被用于构造不可测集合：

Vitali 集 V 的构造:

选择公理与测度论

在测度论中，选择公理一方面保证了 Lebesgue 测度的基本性质：

Fact

Lebesgue 测度具有可数可加性。

另一方面，选择公理被用于构造不可测集合：

Vitali 集 V 的构造:

考虑 $[0,1]$ 区间, 称

$$x \sim y$$

当 $x - y$ 为有理数。$\sim$ 是 $[0,1]$ 区间上的等价关系。

选择公理与测度论

在测度论中，选择公理一方面保证了 Lebesgue 测度的基本性质：

Fact

Lebesgue 测度具有可数可加性。

另一方面，选择公理被用于构造不可测集合：

Vitali 集 V 的构造:

考虑 $[0,1]$ 区间, 称

$$x \sim y$$

当 $x-y$ 为有理数。$\sim$ 是 $[0,1]$ 区间上的等价关系。

$[x]$: x 的等价类。

选择公理与测度论

在测度论中，选择公理一方面保证了 Lebesgue 测度的基本性质：

Fact

Lebesgue 测度具有可数可加性。

另一方面，选择公理被用于构造不可测集合：

Vitali 集 V 的构造:

考虑 $[0,1]$ 区间, 称

$$x \sim y$$

当 $x-y$ 为有理数。$\sim$ 是 $[0,1]$ 区间上的等价关系。

$[x]$: x 的等价类。

由选择公理，我们可以从每个等价类 $[x]$ 中选出一个元素。V 即为所选元素构成的集合。

选择公理与测度论

在测度论中，选择公理一方面保证了 Lebesgue 测度的基本性质：

Fact

Lebesgue 测度具有可数可加性。

另一方面，选择公理被用于构造不可测集合：

Vitali 集 V 的构造:

考虑 $[0,1]$ 区间, 称

$$x \sim y$$

当 $x-y$ 为有理数。$\sim$ 是 $[0,1]$ 区间上的等价关系。

$[x]$: x 的等价类。

由选择公理，我们可以从每个等价类 $[x]$ 中选出一个元素。V 即为所选元素构成的集合。

V 是不可测集。

选择公理与点集拓扑学

历史上，点集拓扑学的研究从一开始就自由的使用选择公理。我们在课本上见到的许多常见定理都依赖于选择公理：

- (Baire 纲定理) 可数个第一纲集的并是第一纲集。
- 可分度量空间的子空间是可分的。
- 紧致性的等价定义。
- (Stone-Cech 紧化定理) 任意拓扑空间存在一个万有紧化。

选择公理与分析

- (Krein-Milman 定理): 若 K 是局部凸拓扑向量空间 X 上的紧凸集。则 K 存在极值点。
- (Hahn-Banach 定理) 向量空间上有界线性算子可以延拓到全空间。
- 算子代数的超滤构造。

选择公理与数理逻辑

正如前述，一阶命题逻辑的许多基本定理的证明依赖于选择公理：

- 完备性定理。
- 紧致性定理。
- Lowenheim-Skolem 定理。
- 超滤扩张的 Los 定理。

这就意味着通常我们假设元数学是满足选择公理的。

选择公理与公理集合论

作为 ZFC 的基础公理，选择公理在日常的集合论构造中不可或缺。如果不使用选择公理，我们甚至不能判定许多反直观的命题。

- 实数是可数个可数子集的并。
- 一个无限集可以写成两个不交无限集的并。
- 任意无限集都可以列出可数个元素。
- 任意无限集与单点集的并集与原集合等势。

选择公理与公理集合论

作为 ZFC 的基础公理，选择公理在日常的集合论构造中不可或缺。如果不使用选择公理，我们甚至不能判定许多反直观的命题。

- 实数是可数个可数子集的并。
- 一个无限集可以写成两个不交无限集的并。
- 任意无限集都可以列出可数个元素。
- 任意无限集与单点集的并集与原集合等势。

Sierpinski 证明了下面的有趣结论

Theorem (Sierpinski)

强广义连续统假设导出选择公理。

Banach-Tarski 悖论

Banach-Tarski 的分球怪论是选择公理的最知名的反直观推论。

Theorem (Banach-Tarski)

一个球和它自身的两个拷贝是等度分解的。

设 A 和 B 是欧几里得空间的两个子集。如果它们可以分为有限个不相交子集的并集，形如 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 和 $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ 且对任意 i，子集 A_i 与 B_i 在刚体变换下不变，那么这两个子集称为等度分解的。

Banach-Tarski 悖论

Banach-Tarski 的分球怪论是选择公理的最知名的反直观推论。

Theorem (Banach-Tarski)

一个球和它自身的两个拷贝是等度分解的。

设 A 和 B 是欧几里得空间的两个子集。如果它们可以分为有限个不相交子集的并集，形如 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 和 $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ 且对任意 i，子集 A_i 与 B_i 在刚体变换下不变，那么这两个子集称为等度分解的。
关于分球怪论证明的一个视频：

https://www.bilibili.com/video/av2674104/

原始来源于 https://youtu.be/s86-Z-CbaHA

选择公理与 ZFA 的独立性

基于对选择公理的辩护，Zermelo 引入了公理化方法，并首次引入了集合论公理系统。这一系统随着二十世纪早期数理逻辑学的飞速发展得以不断地补充完善。基于公理化方法，人们可以在系统内部研究选择公理的正确性。

选择公理与 ZFA 的独立性

基于对选择公理的辩护，Zermelo 引入了公理化方法，并首次引入了集合论公理系统。这一系统随着二十世纪早期数理逻辑学的飞速发展得以不断地补充完善。基于公理化方法，人们可以在系统内部研究选择公理的正确性。

ZFA 是由 Frankel 首先提出，并由 Lindenbaum 和 Mostowski 加以完善后得到的公理系统。这一系统在 ZF 的基础上引入了原子。在这一系统中，原子与空集具有相同的地位。Frankel 研究了原子的置换群，并依此定义了 ZFA 的置换模型。从而证明了选择公理与 ZFA 的独立性。

选择公理与 ZF 的相对一致性

1935–38 年间，Gödel 构造了可构造集宇宙 L，并验证了在 L 中，选择公理和广义连续统假设都成立。这一结果在一定程度上平息了关于选择公理的合理性的争议。

Theorem (Gödel)

$Con(ZF) \to Con(ZF + AC)$

这样，ZFC 的一致性就可以归结于 ZF 的一致性。根据第二不完全性定理，ZF 的一致性不能在 ZF 系统中得到证明而只能依赖经验验证。这就保证了在公理集合论系统中引入选择公理的合理性。

选择公理与 ZF 的独立性

上世纪 60 年代，Cohen 发展出了一套研究与 ZF 相关的独立性命题的方法，即力迫法。力迫法是当代集合论研究的核心方法和中心研究对象。利用力迫法，Cohen 证明了选择公理和连续统假设关于 ZF 的独立性，从而完全解决了选择公理相对 ZF 的地位问题。

Theorem (Cohen)

$Con(ZF) \to Con(ZF + \neg AC)$

目录

力迫法与不可证性

力迫法的诞生对选择公理的研究产生了重大影响。这是因为在此之前，人们并没有办法分离选择公理及其推论。力迫法是第一个 (某种意义上唯一一个) 能系统的研究集合论中不可证性的方法。

现代的力迫构造方法可以简述如下：

从一个 ZFC 模型 V 出发，在 V 中根据目标选定一个偏序 $(P,<)$。接下来构造一个元数学对象 $G \subseteq P$ 并定义结构 $V[G]$。Cohen 的力迫定理保证了 $V[G]$ 是一个满足 ZFC 的模型并满足某个通过偏序 P 得到的性质。

Example (Cohen 的否定连续统假设偏序)

偏序集 P 的元素为所有 ω_2 到 2 的有限部分函数，偏序关系 $<$ 为包含关系。

选择公理与对称模型

$V[G]$ 满足 ZFC，故我们还是不能得到不满足选择公理的模型。为了解决这一问题，Cohen 引入了对称模型方法。

Cohen 考虑偏序集 $(P,<)$ 的自同构群及其子群。任意子群在 $V[G]$ 上诱导出一些在群作用下不变的元素。这些元素组成的类就是该子群对应的对称模型 N。经过计算，N 满足 ZF。另一方面，若子群非平凡，则选择公理在对称模型中不成立。

Example (Cohen 第一模型)

- 偏序集如上页所述。
- 所取自同构群的元素为，在 ω_2 上置换有限子集所诱导的同构。

Cohen 第一模型的性质

Cohen 第一模型是选择公理被严重破坏的一个模型：

Theorem (Cohen,Feferman, Halpern-Lévy)

在 *Cohen* 第一模型中有:

1. $ZF + \neg WO_{\mathbb{R}}$ 成立。
2. 依赖选择公理不成立。
3. 布尔素理想定理成立。
4. 存在不可测集。

置换法与对称模型法

值得一提的是，尽管 Frankel 发现的置换法不能证明 ZF 和选择公理的等价性，Jech-Sochor 找到了一种将置换构造转化为对称模型构造的强力方法，从而将早期的许多 ZFA 独立性结果直接推广到 ZF 下。这一方法也大大简化了后来的研究。

Theorem (Jech-Sochor)

令 U 为一个置换模型，令 A 为原子集，α 为序数。则存在对称模型 N 和从 U 到 N 的嵌入映射 $x \mapsto \tilde{x}$ 使得 $(P_\alpha(A))^U$ 和 $(P_\alpha(\tilde{A}))^N$ 同构。

基于对称模型方法，许多关于选择公理的独立性结果得以证明。下面是一些例子：

- (Feferman 模型) 布尔素理想定理不成立，存在不可线性序化的子集。
- (Cohen/Pincus 模型) 依赖选择公理成立，ω_1-选择公理不成立。
- (Feferman/Levy 模型) 实数是可数个可数集的并。
- (Feferman/Blass 模型) 所有超滤都是主超滤。
- (Frankel 第一置换模型) 存在一个无穷集不能写成两个不交无穷集的并。
- (Lauchli/Jech 置换模型) 存在两个同构向量空间，分别以 B_1 和 B_2 为基，然而 B_1 和 B_2 不等势。
- (Lauchli 置换模型 IV) 存在一个域有两个不同构的代数闭包。

基于对称模型方法，许多关于选择公理的独立性结果得以证明。下面是一些例子：

- (Feferman 模型) 布尔素理想定理不成立，存在不可线性序化的子集。
- (Cohen/Pincus 模型) 依赖选择公理成立，ω_1-选择公理不成立。
- (Feferman/Levy 模型) 实数是可数个可数集的并。
- (Feferman/Blass 模型) 所有超滤都是主超滤。
- (Frankel 第一置换模型) 存在一个无穷集不能写成两个不交无穷集的并。
- (Lauchli/Jech 置换模型) 存在两个同构向量空间，分别以 B_1 和 B_2 为基，然而 B_1 和 B_2 不等势。
- (Lauchli 置换模型 IV) 存在一个域有两个不同构的代数闭包。

力迫方法和对称模型法在过去的的几十年中经历了长足的发展，很多证明的技巧已经非常复杂。更多的例子可查阅 Howard, Paul; Rubin, Jean E. (1998). Consequences of the axiom of choice. Mathematical Surveys and Monographs. 59. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society

下面几个著名的关于选择公理的公开问题：

Question

1. 划分原则（*Partition Principle*）是否能推出选择公理？
2. 局部强连续统假设是否推出局部选择公理？

目录

大基数

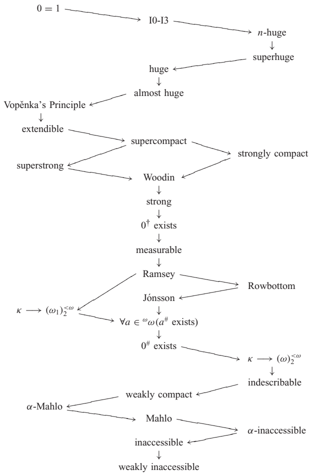
根据第一不完全性定理，ZFC 并不是一个完全理论。是否有一个理想的方式给出 ZFC 的扩张理论呢？集合论的实践表明，大基数是扩张 ZFC 理论的一个合理的选择。其主要原因可以归纳为几点：

- 大基数可以按逻辑程度近似线性排列。高阶大基数通常能证明低阶大基数的相容性。
- 大基数刻画了高阶无穷应具有的性质。
- 大基数在集合论和数学中有很多重要应用。

大基数层次

Chart of Cardinals

The arrows indicates direct implications or relative consistency implications, often both.



摘自 Kanomori 的经典教科书《高阶无穷》

大基数与选择公理

目前唯一一个能在 ZFC 下被明确证明导出矛盾的大基数性质是 Reinhardt 基数：

Theorem (Kunen)

(ZFC) 不存在非平凡实质嵌入 $j : V \to V$.

在没有选择公理的时候，目前还没有任何一个能被 ZF 单独否定的大基数性质。上世纪 90 年代，Woodin 基于对不一致性的探求，定义了比 Reinhardt 强的多的 Berkeley 基数。

Berkeley 基数

称 κ 是一个 Berkeley 基数当对所有包含 κ 的传递集合 M，存在一个 M 到自身的、关键点在 κ 之下的实质嵌入。

目前为止，Berkeley 基数相对 ZF 的一致性仍是一个开问题。

大基数与选择公理的独立性

大多数大基数性质都是在 ZFC 中定义的，故自然要求选择公理成立。然而，部分的大基数性质的定义不依赖于选择公理。例如：

- 不可达基数
- 可测基数
- 超紧基数

可以验证，这些基数的存在性与选择公理是独立的。当然，前述的 Berkeley 基数不在此列。

Example

Solovay 模型是将大基数用力迫法坍塌至 $\aleph_1$ 后取的一个标准对称模型。在可测基数导出的 Solovay 模型中，$\aleph_1$ 是可测基数。

Solovay 模型与实数

Solovay 模型是一个重要的利用大基数得到选择公理否定版本的例子。

Theorem (Solovay)

在不可达基数导出的 *Solovay* 模型中，下列成立：

- 实数子集都 *Lebesgue* 可测。
- 实数子集都具有 *Baire* 性质。
- 实数子集都满足完全树性质。
- *Hahn-Banach* 定理不成立。
- 分球怪论不成立。

事实上，所有实数子集都 Lebesgue 可测具有的大基数强度为不可达基数。

Gitik 模型

利用大基数，Gitik 给出了一个非常极端的否定选择公理模型：

Theorem (Gitik)

假设有真类多个强紧基数，那么存在一个对称模型，在其中所有集合都可以写成可数个势更小的集合的并。

目前并不知道是否能把可数换成其它的基数。一个核心公开问题是：

Question

是否存在一个集合论模型，其中有四个连续的可测基数。

决定性公理

决定性公理是 1962 年由 Mycielski 和 Steinhaus 引入的一个与选择公理对立的命题，也是少数几个自然的可作为选择公理反面的替代公理之一。

决定性公理

对任意由两个玩家进行的、长度为 ω 的完全信息游戏，必有一个玩家有必胜策略。

Theorem (Mycielski-Swierczkowski)

决定性公理导出实数子集都 *Lebesgue* 可测。

Corollary

决定性公理与选择公理矛盾。

同时，如前述，这也说明决定性公理具有大基数强度，事实上，决定性公理的大基数强度是 ω 个 Woodin 基数。

另一方面，决定性公理与选择公理的弱形式无矛盾。

Theorem (Kechris)

$AD^{L(\mathbb{R})} \to$ 依赖选择公理。

关于决定性公理的一个核心公开问题是决定性公理是否能直接导出依赖选择公理。

Woodin 的 AC 猜想

在对最终内模型 Ultimate-L 的研究过程中，Woodin 观察到大基数能够导出类似选择公理的一些性质：

Theorem (Woodin,ZF)

- 设 κ 是超紧基数。则 $Coll(\omega, < V_\kappa)$ 力迫依赖选择公理.
- 设 κ 是奇异基数且为超紧基数的极限，则 κ^+ 是正则基数。

Woodin 的 AC 猜想

(ZF) 假设有足够多个超紧基数，则可以力迫选择公理。

从某种意义上来说，如果承认足够大的大基数存在，那么选择公理就应该近似成立。

注意：前面提到的 Gitik 模型是一个不可能力迫得到选择公理的模型。

一些参考资料

- 选择公理的 wikipedia 辞条：
  https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_determinacy
- Stanford Encyclopedia of Philosophy 的选择公理辞条：
  https://plato.stanford.edu/entries/axiom-choice/
- 关于选择公理的参考书：

  - Howard, Paul; Rubin, Jean E. (1998). Consequences of the axiom of choice. Mathematical Surveys and Monographs. 59. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society
  - Jech, Thomas (2008) [1973]. The axiom of choice. Mineola, New York: Dover Publications

目录

选择公理与基

在前面我们提到，选择公理与线性空间上基的存在性有密切关系。

Theorem (Blass)

选择公理等价于所有线性空间都有基。

由于证明中需要使用任意大的域来定义线性空间，一个自然的问题是：

Question (Blass)

如果对某个域 F，所有 F 线性空间都有基，那么选择公理是否成立？

特别是下面的特殊情况：

Question (Pincus-Prikry)

如果 $(\mathbb{R}, +)$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间有一组基，那么是否可以导出实数可以被良序化？

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的 Hamel 基和选择公理

Theorem (Schindler-Wu-Yu)

$Con(ZFC) \to Con(ZF + \mathbb{R}/\mathbb{Q}\text{有一组基} + \neg WO_{\mathbb{R}})$.

我们实际上证明了在 Cohen 第一模型中，存在 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的一组基。

实数上的一些特殊子集

Definition

对 $\mathbb{R}$ 的不可数子集 A，我们称 A 是

1. Vitali 集，当 A 是模 $\mathbb{Q}$ 等价关系上的选择函数；
2. Sierpinski 集，当 A 与所有零测集的交集为可数集；
3. Luzin 集，当 A 对所有第一纲集的交集为可数集；
4. Bernstein 集，当对所有完全集 P，$P \cap A$ 和 $A \setminus P$ 都非空；
5. Hamel 基，当 A 是 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的一组基；
6. Burstin 基，当 A 是 Hamel 基且与任意完全集交非空；
7. Mazurkiewicz 集，当 A 被看做 $\mathbb{R}^2$ 集合时，与平面上所有直线有且只有两个交点。

...

这些特殊子集都可以由选择公理构造得出。

不需要选择公理的特殊子集模型

利用新的力迫序集，我们构造了一个对称模型满足：

Theorem (Brendle, Castiblanco, Schindler, Wu, Yu)

存在一个对称模型 N 满足：

- $ZF + \neg WO_{\mathbb{R}}$
- 依赖选择公理
- 存在 *Vitali* 集
- 存在 *Sierpinski* 集
- 存在 *Luzin* 集
- 存在 *Bernstein* 集
- 存在 *Hamel* 基
- 存在 *Burstin* 基
- 存在 *Mazurkiewicz* 集