探索无穷：从数学基础的视角

程勇（武汉大学哲学学院）

摘要：
本文从数学基础的角度探讨数学中的无穷。集合论是关于实无穷的数学理论。本文从数学基础的视角重点讨论集合论哲学中一个重要的基础问题：独立性问题。特别地，本文讨论一种基于集合论实在主义的解决独立性问题的方案：哥德尔纲领。连续统假设是检验哥德尔纲领能否成功的试验石。基于武丁的工作，我们讨论两种解决连续统假设的方法：局部方法和全局方法。[1]

关键词：无穷、独立性问题、连续统假设、集合论实在主义、哥德尔纲领

一、导论

关于无穷，希尔伯特（David Hilbert）写道："没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明"。[2] 无穷观念的历史和人类思想的历史一样悠久，无穷的观念一直挑战着历史上最敏锐的头脑。人类对无穷的思考和探索可见于不同的领域：哲学、数学、物理学、宇宙学、神学。不同知识领域中的无穷观念提供了理解无穷的不同方式和途径。[3] 在形而上学中，人们寻问无穷是终极、完美的实体吗？较小的事物是否也可以是无限的，以及无限如何与我们看似有限的生命相关？在数学中，人们寻问无穷是一种数吗？无穷是不可数、不可测量的吗？ 数学能否处理无穷？在物理学中，人们寻问运动是否可以无限地进行下去，物质是否可以无限地分割？在天文学中，人们寻问是否有无穷多的恒星，宇宙是否永远存在？在神学中，人们寻问有限的个体是如何能够认识和直观到无限的上帝？[4]

本文主要讨论数学中的无穷及其数学基础问题。集合论是研究实无穷的数学理论。本文从数学基础的角度重点讨论集合论哲学中一个重要的基础问题--独立性问题--及其解决方案。本文的结构如下：第二节中，我们从数学基础的视角介绍集合论创立的四个代表性人物的主要思想及其贡献；第三节中，我们讨论集合论的独立性问题，及关于独立性问题的不同哲学立场；第四节中，我们讨论一种基于集合论实在主义的解决独立性问题的方案：哥德尔纲领。特别地，我们讨论新公理的选择原则和四类候选公理（大基数（large cardinal）公理、决定性（determinacy）公理、$\mathbf{V}=\mathbf{L}$、力迫（forcing）公理）。第五节中，我们讨论文

[1] 基金项目： 国家社科基金一般项目（项目编号：18BZX131）阶段性成果。

[2] David Hilbert, "On the infinite", in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics Selected Readings*. Cambridge University Press, p. 185, 2012.

[3] 关于无穷的观念史及对数学、物理学、天文学、哲学和神学中的无穷的讨论，参见研究文集：Michael Heller & W. Hugh Woodin (eds.), *Infinity: New Research Frontiers*, Cambridge University Press, 2011.

[4] Wolfgang Achtner, "Infinity as a transformative concept in science and theology", in: Michael Heller & W. Hugh Woodin (eds.), *Infinity: New Research Frontiers*. Cambridge University Press, 2011.

献中两种解决连续统假设的方法：局部方法和全局方法。第六节总结全文。

二、集合论的创立

集合论的创立包括四个阶段，这四个阶段的代表性人物分别是：康托尔（Georg Cantor）、 策梅洛（Ernst Zermelo）、哥德尔（Kurt Gödel）、科恩（Paul Cohen）。本节不是关于集合论发展史的综述，而是从数学基础的视角探讨在从康托尔的素朴集合论发展到公理集合论，进而成为数理逻辑中一个独立成熟的领域的过程中，集合论是如何更新了人们对无穷的认识，及其在思想和方法上带来的变革和突破。

本节的结构如下：2.1 节中，我们概述康托尔之前的时代对无穷的认识及其影响。2.2 节中，我们介绍康托尔是如何创立集合论的，其在创立关于实无穷的数学理论的过程中在思想观念上的重要突破和主要贡献，特别地，我们引入康托尔提出的连续统假设。2.3 节中，我们介绍公理集合论是如何诞生的，它如何解决罗素悖论和成为一种数学的基础。2.4 节中，我们重点介绍哥德尔和科恩的关于连续统假设的独立性结果，及他们创造的方法的思想和意义。

2.1 康托尔前时代

最早的关于无穷的文献记录可追溯到古希腊，在古希腊哲学的前苏格拉底时代，无穷是哲学和宗教讨论的对象。[5] 希腊人对无穷的理解是基于对物理世界的如下三点观察：时间似乎没有尽头，空间和时间可以无限地细分，空间是无界的。[6] 生活在从神话时代到理性时代过渡时期的阿那克西曼德（Anaximander），是第一个谈论无穷的人。[7] 阿那克西曼德使用“无限”（Apeiron）这个词，其意指无界的，不确定的。[8] 古希腊哲学家们认为理性的目标在于寻找秩序、确定性和清晰性，“无限”被认为是非理性的、不可认识的，它变成了一个否定甚至贬义的词。[9] 在古希腊哲学家看来，人类不可能通过理性的方式用科学或数学的方法认识无穷。[10]

古希腊数学家和哲学家对无穷持否定态度。对毕达哥拉斯、埃利亚学派以及哲学家巴门尼德和柏拉图而言，无穷是一个否定性的概念：用有限的语言无法描述它，它是非理性的，它是无形的，它不能被增加或减少，因而它不可认识。[11] 亚里士多德是第一位对无穷给出理性解释的古希腊哲学家，他将无穷从一个神话和宗教中的观念转换为科学的观念。[12] 亚里士多德区分了潜无穷（potential infinity）和实无穷（actual infinity），这一区分的影响持续了近两千年。亚里士多德的这一

---

[5] Wolfgang Achtner,“Infinity as a transformative concept in science and theology”.

[6] Ibid.

[7] Ibid.

[8] Ibid.

[9] Ibid. 这种观点在巴门尼德的哲学中变得很明显：巴门尼德认为，作为哲学首要研究对象的存在是确定的而非无限的。

[10] Ibid.

[11] Ibid.

[12] Ibid.

区分是基于他的哲学中对潜在和现实的区分。 亚里士多德认为，实无穷不存在，无穷作为一种无止尽的过程只以潜在的方式存在。在亚里士多德的哲学中，潜无穷同义于没有界限，一个对象是潜无穷的是指它可被无止尽的扩充。[13] 在亚里士多德看来，自然数集是潜无穷的对象，因为通过后续运算我们可得到越来越大的自然数。潜无穷的对象的形成过程是没有止尽的；若我们不考虑对象的生成过程，而只考虑此过程中生成的对象的整体，我们就得到实无穷的概念。由后续运算所生成的自然数的全体就是一个实无穷集。亚里士多德关于实无穷和潜无穷的区分对后人关于无穷的思考产生了很大的影响。亚里士多德只接受潜无穷而拒绝实无穷，认为实无穷是理智上不可认识的。古希腊人对无穷的理解不能超越潜无穷而走向实无穷，这点对他们的数学的发展产生了深远的影响。在亚里士多德哲学的影响下，实无穷被排除在人类理性范围之外，影响了之后两千多年的历史，阻碍了对实无穷的科学和数学研究。

无穷在科学和数学中的作用的革命转变源自莱布尼茨和牛顿的工作。牛顿和莱布尼兹在创立微积分的过程中引入了无穷小量概念，直观的无穷小量是他们的微积分理论的出发点。虽然牛顿和莱布尼茨都没有给出无穷小量的明确严谨的定义，微积分在很多领域中都取得了丰硕的成果。17 世纪，随着无穷符号和微积分方法的引入，数学家开始研究无穷级数和无穷小量；但无穷仍被认为是与无止尽的过程相关联，那时数学家们不太清楚我们是否可以将无穷理解为一种数或大小。[14] 关于无穷小量究竟是不是零，贝克莱（George Berkeley）曾提出关于无穷小量的悖论。[15] 伽利略（Galileo Galilei）认为实无穷的概念会导致矛盾。伽利略曾提出一个问题：全体自然数组成的集合和全体自然数的平方组成的集合，哪个集合包含更多的数？伽利略观察到自然数和自然数的平方数间可建立一一对应，他认为这与自然数比自然数的平方数多很多的常识相矛盾，因此接受全体自然数作为实无穷集的存在会导致矛盾。

直到 19 世纪 20 年代，一些数学家才开始关注微积分的严格逻辑基础。基于波尔查诺（Bernard Bolzano）、阿贝尔（Niels Henrik Abel）、柯西（Augustin-Louis Cauchy）、狄里赫利（Peter Gustav Lejeune Dirichlet）等人的工作，维尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）给出现在通用的极限概念的严格定义，并把微积分理论严格地建立在极限概念的基础上，从而澄清了关于无穷小量的逻辑悖论。[16] 19 世纪 70 年代初，维尔斯特拉斯、戴德金（Richard Dedekind）和康托尔等人独立地建立了实数理论，并在其基础上证明了极限理论的基本定理，使数学分析建立在实数理论的严格基础之上。

除了康托尔，19 世纪哲学、自然科学和数学领域最优秀的头脑普遍不接受实无穷的概念，而只接受潜无穷：例如伽利略、莱布尼茨、斯宾诺莎、牛顿、高斯（Carl Friedrich Gauss）都拒绝接受实无穷，因为他们认为，如同伽利略所发现的悖论，

---

[13] Wolfgang Achtner,“Infinity as a transformative concept in science and theology”.

[14] Enrico Bombieri,“The mathematical infinity”, in Michael Heller & W. Hugh Woodin (eds.), *Infinity: New Research Frontiers*. Cambridge University Press, 2011.

[15] Ibid.

[16]从极限的角度看，无穷小量不是固定的量而是极限为零的变量，在变化过程中，它不是零，但它的变化趋向是零，无限地接近于零。极限理论揭示了无穷小量与零间的区别与关联。

实无穷的概念会导致矛盾。[17] 直到 19 世纪下半叶，实无穷才在数学中被完全接受。

2.2 康托尔集合论

对实无穷的数学分析是由康托尔首创的，他是认为实无穷可以成为数学研究对象的第一人。康托尔认为实无穷有三种形式：第一种是最完美形式的无穷，它独立于任何世界，称之为绝对无穷（absolute infinity）；第二种无穷存在于这个偶然被造的世界；第三种无穷是数学家、科学家所理解的无穷，人们将其理解为大小、数或序型（order type）。[18] 康托尔所创立的无穷理论是关于第三种无穷，康托尔区分了超限无穷（transfinite infinity）和绝对无穷，并强调他所创立的超限数（transfinite number）理论与绝对无穷间的区别。[19] 超限数是对有限数的超穷扩充，是可被人类理智所认识和分析的数学对象，而绝对无穷是人类理智所无法认识的。在康托尔看来，尽管生成越来越大的超限数的过程是无止尽的，然而所有超限数的总体是这一过程所无法达到的；所有超限数的总体没有大小，绝对无穷是无法被量化的；超限无穷与绝对无穷间的距离也是人类与上帝间的距离。[20] 康托尔认为，所有集合放在一起形成的类是绝对无穷，人们不能通过定量的、理性的、逻辑的方式理解它，而只能通过直觉来理解它。[21] 在康托尔看来，绝对无穷是上帝，是世界中所有数的来源，对上帝的直觉是可能的。[22] 对绝对无穷的直觉经历帮助康托尔发现了具有奇异数学性质的超限数。[23] 在康托尔的理论中，无穷是一个可以像任何其他数学对象一样被研究的数学概念。康托尔的革命性发现开启了数学的一个新时代，无穷不再是个模糊的哲学概念，而变成数学中的一个核心概念。

康托尔关于无穷的革命性发现源于他对三角级数的研究。他在 1870 年证明了三角级数唯一性定理：如果三角级数处处收敛为零，则它的所有系数都为零。[24] 给定实数子集 P，康托尔定义 P' 为 P 的所有极限点（limit point）组成的点集（称 P' 为 P 的求极限运算），定义 $P^{(n)}$ 为对 P 连续 n 次迭代应用求极限运算而得到的点集。康托尔在 1872 年将三角级数唯一性定理推广到一般形式：如果三角级数在除了集合 P 中的点外都处处收敛为零，则它的所有系数都为零，其中对某一自然数 n, $P^{(n)}$ 为空集。[25] 这个定理的表述已包含了康托尔在观念上的突破：将对任意

---

[17] Enrico Bombieri, opcit.

[18] Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, 1990.

[19] Ibid.

[20] Ibid.

[21] 我们常把一些对象的汇集称为类。

[22] Joseph Warren Dauben, opcit.

[23] Ibid.

[24] Akihiro Kanamori, “The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 2, Number 1, 1996.

[25] Akihiro Kanamori, opcit.

点集通过某种运算得到的点集整体看作一个数学对象。

在康托尔的理论中，集合是个初始的根本概念，其是我们思想中确定对象的汇集。我们称一集合是可数的，若存在它和自然数集间的一一对应。康托尔证明了实数集是不可数的，即不存在自然数集和实数集间的一一对应。[26] 这是康托尔关于无穷研究的第一个重要结果，被视为是现代集合论诞生的标志。[27] 康托尔关于此结果的初始证明使用的是波尔查诺-维尔斯特拉斯定理，而并没有使用对角线方法，之后康托尔给出了此定理的使用对角线方法的证明。[28] 对角线方法是康托尔的主要贡献之一，在逻辑和数学中有广泛的应用。[29]

康托尔在集合论中的主要贡献是超限数（包括基数（cardinal number）和序数（ordinal number））理论。当考虑一类数学对象时，我们可抽象地不考虑这些对象的特征，而仅考虑这些对象在我们思想中呈现的次序，由此就产生了序型的概念。若我们进一步抽象地考虑这些数学对象，只考虑它们的数量，这就产生了基数的概念。集合 X 的基数（或大小）记为 $|X|$。康托尔定义两个集合 A 和 B 具有相同的大小（记为 $|A|=|B|$）当且仅当存在 A 和 B 间的一一对应，并证明了自然数集和代数数集间存在一一对应，且 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 间存在一一对应。[30] 给定集合 A 和 B， 定义 $|A|\leq|B|$，若存在 A 到 B 的单射；定义 $|A|<|B|$，若 $|A|\leq|B|$ 且 $|B|\neq|A|$。施罗德-伯恩斯坦（Schröder-Bernstein）证明了若 $|A|\leq|B|$ 且 $|B|\leq|A|$，则 $|A|=|B|$，由此表明基数间的 $\leq$ 关系是反对称的。给定集合 X，$\mathcal{P}(X)=\{Y:Y\subseteq X\}$ 称为 X 的幂集。康托尔的另一重要贡献是证明了，对任意的集合 A，$|\mathcal{P}(A)|>|A|$。 因此，任何集合都存在比它更大的集合，即存在越来越大的基数。

康托尔指出，类似于自然数的加法、乘法和幂运算，我们可类似地定义基数的加法、乘法和幂运算。[31] 康托尔提出了连续统问题：既然 $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$，在 $|\mathbb{N}|$ 和 $|\mathbb{R}|$ 之间是否存在其他的基数？即是否存在实数集的无穷子集 A 使得 $|\mathbb{N}|<|A|<|\mathbb{R}|$。[32]

---

[26] G. Cantor, “On a property of the set of real algebraic numbers”, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, vol. II*”. Clarendon Press, Oxford, pp. 839-842, 2008.

[27] Akihiro Kanamori,“The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen”.

[28] Ibid.

[29] Ibid.

[30] 代数数是代数与数论中的重要概念，指任何整系数多项式的复根。

[31] 令 A,B 为任意的集合，$|A|+|B|=|(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})|$, $|A|\times|B|=|A\times B|$，$|B|^{|A|}=|B^A|$，其中 $B^A=\{f:f$ 是从 A 到 B 的函数$\}$。

[32] Akihiro Kanamori, opcit.

康托尔猜测在$|\mathbb{N}|$和$|\mathbb{R}|$之间没有别的基数，这就是著名的连续统假设。

连续统假设(**CH**)：若X是$\mathbb{R}$的无穷子集，则或者$|X|=|\mathbb{N}|$，或者$|X|=|\mathbb{R}|$。

康托尔解决连续统假设的努力使得集合论发展成为一个独立的数学领域。解决此问题有两种途径：一种途径是研究连续统假设是否对具有不同复杂性的无穷实数子集成立，这个方向的研究推动了描述集合论（descriptive set theory）的发展；另一种途径是发展关于无穷基数的一般理论，以决定$|\mathbb{R}|$在基数层级中的位置，这一方向的研究推动了纯粹集合论的研究。[33]

康托尔超限数理论的另一重要概念是（超限）序数。康托尔视（超限）序数概念为自然数概念的自然超限推广。基数是关乎集合的大小，而序数是关乎序列的长度（或序型）。自然数是有限序数，最小的无穷序数是ω。反复地使用如下序数生成规则，我们可得到越来越大的序数：给定任意的非空序数集A，存在最小的序数α使得α比集A中的元素都大。令Ord为所有序数组成的类，$Card$为所有基数组成的类。本文中，我们用$\alpha,\beta,\gamma,\delta$等表示序数，用$\kappa,\lambda,\mu,\nu$等表示基数。比$\alpha$大的最小序数记为$\alpha+1$，称其为$\alpha$的后续序数。若$\alpha\neq 0$且$\alpha$不是后续序数，则称$\alpha$是极限序数。比$\{\omega+n:n\in\mathbb{N}\}$中序数都大的最小序数记为$\omega+\omega$，称其是$\{\omega+n:n\in\mathbb{N}\}$的极限序数。称序数$\kappa$是基数，若对任意的序数$\alpha<\kappa$，不存在从$\kappa$到$\alpha$的双射。对于有限集，基数和序数两概念间没有区别；然而对于无穷集，两者间有本质的区别。[34] 反复使用后续和极限运算，我们可不断地生成超限序数：

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega+\omega(=\omega\times 2),\cdots,\omega\times 3,\cdots,\omega\times\omega(=\omega^2),\cdots,\omega^3,\cdots,\omega^{\omega},\cdots。$$

以上序数都是可数序数，最小的不可数序数记为ω_1。由后续和极限运算我们可得到越来越大的序数，此过程可无止尽地进行下去。在康托尔的（超限）序数理论中，序数的性质是自然数性质的自然推广。康托尔坚信他的（超限）序数理论会随着时间的推移被认为是简单、自然且恰当的。[35] 康托尔的（超限）序数理论也揭示了有限与无穷间的本质区别。[36]

康托尔有两个遗产：一是将人们对数的认识扩充到超限数，由此推动了后来对大基数的研究；二是提出了连续统假设，在解决**CH**的过程中对实数可定义子集（definable subset）的研究推动了后来对描述集合论的研究。[37] 康托尔的无穷理论不仅创立了超限数的新算术，而且揭示了无穷集的新分类，更新了人们对无穷

---

[33] Akihiro Kanamori, “The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen”.

[34] 例如，$\{1,2,3,\cdots\}\cup\{0\}$和自然数集具有相同的大小，但其序型是$\omega+1$。

[35] Akihiro Kanamori, opcit.

[36] 例如，与自然数的加法不同的是，（超限）序数的加法不满足交换律。

[37] Akihiro Kanamori, opcit.

的认识。关于无穷，传统观点认为：整体大于部分；只有两种集合：有限集和无穷集；无穷集没有不同的大小；无穷只是一不断实现的过程，而不是已完成的实体，只存在潜无穷，不存在实无穷。康托尔所创立的现代集合论表明：整体可以和部分具有相同的大小，无穷集的本质特征正是可和其某一真子集具有相同的大小；无穷集是分层级的，无穷集有不同的大小；无穷不是潜在的过程而是已完成的实体，实无穷是合理的数学研究对象。希尔伯特高度赞誉康托尔的集合论是人类纯粹智力活动的最高成就之一，并称没有人能够把我们从康托尔建立的乐园中赶出去。

20 世纪数理逻辑与数学基础的研究表明，基于亚里士多德的两种无穷观（潜无穷与实无穷）都可发展出丰富优美的数学。基于潜无穷观点可发展出构造主义数学，基于实无穷观点可发展出现代经典数学。本文对关于无穷的独立性问题的讨论是基于康托尔的实无穷观所发展出来的集合论。

2.3 策梅洛公理集合论

康托尔所创立的集合论称为素朴集合论，其默认使用无限制概括规则：对任意的性质 P，所有具有性质 P 的对象构成一个集合。罗素发现，这条直观上显然的性质事实上会导致矛盾。考虑如下性质 $P(x)$： x 是集合且 x 不属于 x。根据无限制概括规则，存在集合 S 使得 a 属于 S 当且仅当 a 是集合且 a 不属于 a。一个自然的问题是： S 是否属于 S？若 S 属于 S，则根据 S 的定义， S 不属于 S。若 S 不属于 S，则又根据 S 的定义， S 属于 S。这个矛盾称为罗素悖论。[38]

罗素悖论一提出，就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大地震动。由无限制概括规则我们可得 $\{x : x \text{是集合且} x \notin x\}$ 是集合从而导致悖论，为了避免悖论，这些对象不应视为集合。罗素悖论提出后，数学家们纷纷提出自己的解决方案。人们希望能够改造康托尔的集合论，通过对无限制概括规则加以限制来排除悖论，这就需要建立新原则。这些新原则必须保证排除一切矛盾，又能使康托尔集合论中一切有价值的内容保存下来。

数学基础三大思想流派（直觉主义、逻辑主义、形式主义）都提出了解决集合论中悖论的方案。直觉主义者接受传统的潜无穷观点，并批判康托尔的实无穷观点，认为将无穷集视为实际已完成的实体是错误的，可能导致悖论。直觉主义者用构造主义的视角看待数学，认为一个数学对象存在等同于存在这个对象的构造方法。直觉主义者拒斥无限制概括规则，从而避免潜在的矛盾。形式主义的代表人物希尔伯特提出他的纲领，期望找到一个形式理论在其中我们可推导出全部数学定理，且可用有限性方法证明此理论的一致性，从而证明此理论不会导致矛盾。而逻辑主义者则期望通过完善集合论公理系统来避免矛盾。罗素在《数学原理》中提出分支类型论（Ramified type theory）以解决他发现的罗素悖论。基于不同

---

[38] 第一个关于集合的悖论是由福尔蒂（Cesare Burali-Forti）在 1897 年发现的，称为最大序数悖论。康托尔在 1899 年也发现一个类似的悖论，称为最大基数悖论。然而罗素悖论更简单和基本，其只涉及集合和属于关系这两个基本的概念。

的避免悖论的策略，二十世纪初人们提出了不同的集合论公理系统。一种策略是：集合论的公理应能确保数学中所需要的集合都存在，且能将太大的集合排除在外。在此策略下，最著名的集合论公理系统是策梅洛-弗兰克尔（Abraham Fraenkel）公理系统 $\mathbf{ZFC}$。在 $\mathbf{ZFC}$ 中，无限制概括规则被分离公理（限制性概括规则）所替代，我们可证明 $\{x : x \notin x\}$ 不是集合从而避免悖论。[39] 另一种策略认为：悖论不是源于存在太大的集合，而是源于允许太大的集合成为其他集合的元素。基于此策略，冯诺依曼（John von Neumann）-贝尔奈斯（Paul Bernays）-哥德尔提出关于集合和类的公理系统 $\mathbf{NBG}$（Von Neumann-Bernays-Gödel set theory）。[40]

策梅洛于 1904 年证明了良序定理：所有的集合都可被良序化。[41] 为了证实他的证明，策梅洛于 1908 年提出了他证明中所使用的关于集合存在性的基本原则，称为集合论公理。特别地，策梅洛在证明良序定理中使用了选择公理。策梅洛认为康托尔和戴德金创造的集合论可以被归结为一些定义和七个相互独立的原则或公理。[42] 在策梅洛之后，冯诺依曼提出良基公理（Well founded axiom），弗兰克尔提出替换公理（Replacement axiom）。[43] 策梅洛最初提出的公理加上良基公理、替换公理和选择公理（Axiom of choice），构成被广泛接受的标准集合论公理系统 $\mathbf{ZFC}$。[44] 公理集合论的建立，避免了康托尔集合论中出现的悖论，从而比较圆满地解决了第三次数学危机。为便于读者理解，下面我们用自然语言表述 $\mathbf{ZFC}$ 的公理，而省去这些公理的形式表达式。

存在公理 存在没有任何元素的集合: 空集（记为$\varnothing$）。
外延公理 若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，且集合 B 中的元素都是集合 A 中的元素，则 $A = B$。
分离公理（限制性概括规则） 对任意特征 $P(x)$ 和任意集合 A，存在集合 B 使得 $x \in B$ 当且仅当 $x \in A$ 且 $P(x)$ 成立。
配对公理 对任意集合 A 和 B，存在集合 C 使得 $x \in C$ 当且仅当 $x = A$ 或者 $x = B$。
并集公理 对任意集合 A，存在集合 B 使得 $x \in B$ 当且仅当存在 $C \in A$ 使得 $x \in C$。
幂集公理 对任意集合 A，存在集合 B 使得 $x \in B$ 当且仅当 $x \subseteq A$。
替换公理 若 $P(x, y)$ 是满足如下性质的特征：对任意 x 有唯一的 y 使得 $P(x, y)$ 成立，则对任意集合 A，存在集合 B 使得对任意 $x \in A$ 存在 $y \in B$ 使得 $P(x, y)$ 成立。

---

[39] 不是集合的类称为真类（proper class），$\{x : x \notin x\}$ 是真类。

[40] $\mathbf{NBG}$ 是 $\mathbf{ZFC}$ 的保守扩充（conservative extension），即对任意 $\mathbf{ZFC}$ 中的语句 ϕ，$\mathbf{ZFC} \vdash \phi$ 当且仅当 $\mathbf{NBG} \vdash \phi$。

[41] 我们称 $<$ 是集合 A 上的一个良序，若 $<$ 是 A 上的线性序，且 A 的任意非空子集都有在关系 $<$ 下的最小元。

[42] Akihiro Kanamori，“The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen”.

[43] Ibid.

[44] $\mathbf{ZFC}$ 是一阶理论，其语言仅含一个非逻辑符号：二元关系符 $\in$。

无穷公理 存在一归纳集。[45]
良基公理 对任意集合 A，$\in$ 是 A 上的良基关系。[46]
选择公理 每个非空集族 $\langle X_i : i \in I\rangle$ 都有选择函数：存在函数 f 使得对任意的 $i \in I, f(i) \in X_i$。

ZFC 的公理告诉我们什么样的集合存在，及给定集合如何构造新的集合。无穷公理告诉我们存在一无穷集；良基公理排除了一些病态集合的存在（如满足 $x \notin x$ 的集合 x）；选择公理是非构造性的，其刚提出时是广受质疑的，但在数学实践中逐步被接受为集合论公理。集合论公理系统 **ZFC** 被武丁（W. Hugh Woodin）称为是 20 世纪的选择，[47] 在数学实践中，**ZFC** 公理被学界广泛接受为关于集合的基本原则。关于对 **ZFC** 公理的合理性的辩护，参见麦迪（Penelope Maddy）的著作《数学中的自然主义》。[48]

函数和自然数是数学中的两个基础概念。库拉托夫斯基（Kazimierz Kuratowski）使用集合定义序对的概念：$(x,y) \triangleq \{\{x\},\{x,y\}\}$，由序对我们可进一步定义函数概念。冯诺依曼使用集合定义自然数：$0 \triangleq \varnothing$，$1 \triangleq \{\varnothing\}$，$2 \triangleq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$3 \triangleq \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，…，$n+1 \triangleq n \cup \{n\}, \cdots$。由自然数我们可进一步定义有理数和实数。公理集合论提供了一种简单而统一的方式定义数学的基本概念。若 M 是包含所有序数的传递类（transitive class）且 $M \vDash \mathbf{ZFC}$，我们称 M 是 **ZFC** 的集宇宙（或内模型（inner model））。[49] 我们可如下递归定义典范集宇宙 $\mathbf{V}$：$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathbf{V}_\alpha$，其中 $\mathbf{V}_0 = \varnothing, \mathbf{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha), \mathbf{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{V}_\alpha$ 若 λ 是极限序数。层级 $\mathbf{V}_\omega$ 对应自然数集，此层级的理论对应一阶算术；层级 $\mathbf{V}_{\omega+1}$ 对应实数集，此层级的理论对应二阶算术；[50] 层级 $\mathbf{V}_{\omega+2}$ 对应 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$，此层级的理论对应三阶算术。在三阶算术中，人们可以谈论实数的任意子集。在 $\mathbf{V}_\omega, \mathbf{V}_{\omega+1}, \mathbf{V}_{\omega+2}$ 中我们可分别表达关于一阶算术、二阶算术（经典分析）、三阶算术（泛函分析）的命题，因此涵盖

---

[45] 我们称集合 A 是归纳集（inductive set），若 $\varnothing \in A$ 且对任意的 $y \in A, y \cup \{y\} \in A$。

[46] 即不存在 A 中元素的无穷下降链 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \in a_n$。

[47] W. Hugh Woodin, “The transfinite universe”, in: *EFI lecture series*, 2009, http://logic.harvard.edu/efi.

[48] Penelope Maddy, *Naturalism in mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 1997.

[49] 我们称类 A 是传递的，若对任意的 $x \in A, x \subseteq A$。

[50] 二阶算术与一阶算术的区别是，量词不仅可以量化自然数也可以量化自然数的子集。关于二阶算术，参见：Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Pub. Co, 1980。

经典数学中的常见数学对象。[51] 集合论公理系统 $\mathbf{ZFC}$ 被广泛接受为数学的基础：经典数学的概念可通过集合来定义，经典数学中的定理可归结为由 $\mathbf{ZFC}$ 公理推导出的定理；在这个意义上，我们可以说经典数学可归结为集合论。

2.4 哥德尔与科恩

康托尔猜想连续统假设成立，但一生未能解决这个问题。希尔伯特认为 $\mathbf{CH}$ 十分重要，他也曾尝试解决 $\mathbf{CH}$，但最终也没成功。在 1900 年第二届世界数学家大会上，希尔伯特在题为《数学问题》的演讲中将连续统假设列为他提出的 23 个最重要的数学未解问题中的第一个问题。

哥德尔在 1938 年证明了，如果 $\mathbf{ZFC}$ 是一致的，那么 $\mathbf{ZFC}+\mathbf{CH}$ 也是一致的。在证明此结论中，哥德尔定义了可构成集 $\mathbf{L}$，其是包含所有序数的 $\mathbf{ZFC}$ 的极小内模型。给定集合 X，令 $Def(X)$ 为所有以 X 中元素为参数在 X 中可定义的 X 的子集组成的集合，称为 X 的所有可定义子集组成的集合。可构成集 $\mathbf{L}$ 的定义和 $\mathbf{V}$ 类似，其不同之处在于，层级 $\mathbf{L}_{\alpha+1}$ 不是 $\mathbf{L}_\alpha$ 的所有子集组成的集合，而是 $\mathbf{L}_\alpha$ 的所有可定义子集组成的集合。可构成集 $\mathbf{L}$ 可递归定义如下：$\mathbf{L}=\bigcup_{\alpha\in Ord}\mathbf{L}_\alpha$，其中 $\mathbf{L}_0=\varnothing, \mathbf{L}_{\alpha+1}=Def(\mathbf{L}_\alpha), \mathbf{L}_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathbf{L}_\alpha$ 若 λ 是极限序数。哥德尔证明了 $\mathbf{L}\vDash\mathbf{ZFC}+\mathbf{CH}$，从而证明了 $\mathbf{CH}$ 相对于 $\mathbf{ZFC}$ 的一致性。因此，$\neg\mathbf{CH}$ 在 $\mathbf{ZFC}$ 中不可证。一般地，哥德尔解决了如下子模型问题：给定模型 $\langle M,E\rangle\vDash\mathbf{ZFC}$，如何构造子模型 $\langle\bar{M},\bar{E}\rangle$ 使得 $\langle\bar{M},\bar{E}\rangle\vDash\mathbf{ZFC}+\mathbf{CH}$，其中 $\bar{M}\subseteq M$ 且 $\bar{E}=E\cap(\bar{M}\times\bar{M})$。[52] 关于哥德尔在集合论中的更多工作，详见《哥德尔如何变革集合论》一文。[53]

科恩在 1963 年证明了，如果 $\mathbf{ZFC}$ 是一致的，那么 $\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH}$ 也是一致的。在证明此结论中，柯恩发明了力迫法。[54] 科恩的力迫法采用与哥德尔可构成集 $\mathbf{L}$ 相反的方法，不是考虑 $\mathbf{V}$ 的子模型，而是通过增加新集合的方法扩充 $\mathbf{V}$，扩充后的模型的性质取决于增加的新集合。假设 $\mathbf{ZFC}$ 是一致的，且 M 是 $\mathbf{ZFC}$ 的可数传递模型。力迫法的基本思想是，人们用 M 中的一个偏序集 $\mathbb{P}$ 去逼近一个脱殊滤（generic filter）$G\subseteq\mathbb{P}$，并由 G 构造 M 的力迫扩充 $M[G]$ 使得 $M[G]$ 中的真可被

[51] 特别地，在 $\mathbf{V}_{\omega+2}$ 中我们可表达 $\mathbf{CH}$。

[52] W. Hugh Woodin, “The Continuum Hypothesis Part I”, *Notices of the AMS*, 48(6): 567-576, 2001.

[53] Juliet Floyd and Akihiro Kanamori,“How Gödel Transformed Set Theory”, Notices of the AMS, Volume 53, Number 4, 419-427, 2006.

[54] 关于力迫法的技术细节，参见：（1）Kenneth Kunen, *Set Theory: An Introduction To Independence Proofs* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 102), North Holland, 1983；（2）Thomas Jech, *Set theory*, Heidelberg: Springer, 2006。

M 中的真所控制，通过选择恰当的$\mathbb{P}$，我们可使$M[G]$满足不同的性质。[55] 通过恰当选择M 中的偏序集$\mathbb{P}$，柯恩定义了M 的力迫扩充$M[G]$，并证明了$M[G]\vDash \mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH}$，从而证明了$\neg\mathbf{CH}$相对于$\mathbf{ZFC}$的一致性。 因此，$\mathbf{CH}$在$\mathbf{ZFC}$中不可证。一般地，科恩解决了如下的外模型问题：给定模型$\langle M,E\rangle\vDash \mathbf{ZFC}$，如何构造扩充模型$\langle M^*,E^*\rangle$，使得$\langle M^*,E^*\rangle\vDash \mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH}$，其中$M\subseteq M^*$且$E=E^*\cap(M\times M)$。[56] 给定理论$T$及其语言下的语句$\phi$，我们称$\phi$是$T$中的独立性命题（或$\phi$是独立于$T$的），若$T\nvdash\phi$且$T\nvdash\neg\phi$；称理论$T$是完全的，若不存在独立于$T$的语句。由哥德尔和科恩的结果可知，**CH** 是独立于 **ZFC** 的，这解释了人们之前在 **ZFC** 中证明 **CH** 的努力为何不成功。力迫法是一种用来证明某一命题是独立于 **ZFC** 的强有力的工具，在逻辑和数学的很多领域中有广泛的应用。到目前为止，除了力迫法，人们还没有发现其他的证明独立性的有力工具。[57]

康托尔的工作开创了对实无穷的数学分析，策梅洛的工作将康托尔的素朴集合论改进为公理集合论，且避免了罗素悖论。哥德尔对可构成集 **L** 的结构的精细分析使得集合论的研究重心转移到对集合理论的内模型及其独立性命题的研究上，使集合论成为一个独立的研究领域。柯恩所发明的力迫法是一种构造集合理论的模型及证明独立性结果的强有力的工具，使集合论成为数学中一个复杂成熟的研究领域，数理逻辑的一个重要分支。科恩的力迫法在观念和技术上开创了集合论的一个新时代。 在科恩之后，集合论进入更深入的专业发展阶段，其主要领域有：大基数、内模型论、力迫法、决定性公理、描述集合论等。[58]

三、独立性问题

独立性命题（independent proposition）在逻辑和数学中是普遍存在的。一个自然的问题是：独立性命题有答案（即有确定的真值）吗？我们称此问题为独立性问题（the independence problem）。根据独立性命题的表达复杂性，本节先分别讨论在一阶算术、二阶算术及高阶算术中可表达的独立性命题。最后，我们讨论关

---

[55] 我们称$G\subseteq\mathbb{P}$是M 的脱殊滤，若G是$\mathbb{P}$的一个滤子（filter），且对任意$\mathbb{P}$的稠密（dense）子集D，若$D\in M$，则$G\cap D\neq\varnothing$。关于滤子和稠密子集的定义，参见：Kenneth Kunen, *Set Theory: An Introduction To Independence Proofs*。

[56] W. Hugh Woodin, “The Continuum Hypothesis Part I”.

[57] 关于科恩在集合论中的更多工作，详见：Akihiro Kanamori,“Cohen and Set Theory”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 14, Number 3, 2008.

[58]关于这些领域，参见：（1）M. Foreman & A. Kanamori, *Handbook of Set Theory*. Springer-Verlag, 2010；（2）Thomas Jech, *Set theory*；（3）Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*. Springer Monographs in Mathematics, second edition, Springer, Berlin, 2009。

于独立性问题的不同哲学立场。

哥德尔不完全性定理表明，皮亚诺算术(**PA**)的任意递归可公理化的一致扩充理论都是不完全的，即存在此理论的独立性命题。不完全性定理的证明使用了元数学方法（如算术化（arithmetization）、可表示性（representability）、自指性构造（self-reference construction）），由此方法我们可构造很多独立于 **PA** 的算术命题。人们通常认为，使用元数学方法构造的独立性命题是纯粹的逻辑构造，没有实在的数学含义。我们称由具有实在数学含义的独立性命题所揭示的不完全性现象为具体不完全性（concrete incompleteness）。具体不完全性在数学中是普遍存在的。在哥德尔之后，人们在经典数学中发现了很多具有实在数学含义的独立于 **PA** 的算术语句。[59] 然而，这些独立于 **PA** 的算术语句都是在 **ZFC** 中可证的。本文我们重点讨论 **ZFC** 的独立性命题。下文中，当我们谈论独立性命题时，我们默认是指 **ZFC** 的独立性命题。不论观念上还是技术上，如何解决独立性问题是集合论及其哲学研究中最重要的理论问题。

经典描述集合论研究在二阶算术中可定义的实数子集的性质，其源于 20 世纪初分析学家博雷尔（Émile Borel），贝尔（René-Louis Baire）和勒贝格（Henri Lebesgue）的工作。通过数学家卢津（Nikolai Luzin）及他的学生们，特别是苏斯林（Andrei Suslin）的工作，描述集合论变成一个独立的研究领域。[60] 下面我们先讨论经典描述集合论中关于实数可定义子集的独立性命题。

我们先给出若干定义。实数的博雷尔集（Borel set）是由实数的闭子集可数次应用可数并和可数交运算而得到的实数子集。[61] 我们称 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是投影集（projective set），若对某一自然数 k , X 是由 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的闭子集有限次地使用补运算[62]和投影运算[63]而得到的。[64] 苏斯林证明了博雷尔集恰为 Δ^1_1 集。事实上，实数的投

---

[59] 例如，Kanamori-McAloon principle, the Kirby-Paris sentence, the Hercules-Hydra game, the Worm principle, the flipping principle, the arboreal statement, P.Pudlák's Principle, the kiralic and regal principles。参见：（1）Lev D. Beklemishev, “Gödel incompleteness theorems and the limits of their applicability I”, *Russian Math Surveys*, 2010；（2）Yong Cheng, *Incompleteness for Higher-Order Arithmetic: An Example Based on Harrington's Principle*. Springer series: Springerbrief in Mathematics, Springer, 2019。

[60] Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”, in: *The stanford encyclopedia of philosophy*, http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/large-cardinals-determinacy/. 2014.

[61] 关于博雷尔集的递归定义，参见：Peter Koellner, opcit。

[62] 给定 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，我们称 $\{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$ 是 A 的补集（或由 A 使用补运算而得）。

[63] 给定 $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$，$A$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的投影定义为 $p[A] = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \cdots, x_n, y) \in A$ ，对某一 $y \in \mathbb{R}\}$。称 $p[A]$ 为由 A 使用投影运算而得。

[64] 我们可如下递归地定义投影集：称 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Σ^1_0 集，若 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集；称 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Σ^1_{n+1} 集，若 X 是由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的某一 Σ^1_n 集的补集使用投影运算而得；称 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Π^1_n 集，若 X 的补集是 Σ^1_n 集；称 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 Δ^1_n 集，若 X 既是 Σ^1_n 集又是 Π^1_n 集；称 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是投影集，若对某一自然数 n ，X 是 Σ^1_n 集。

影子集恰为以实数为参数在二阶算术中可定义的实数子集。我们可如下递归定义 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$，其是由 $\mathbb{R}$ 迭代使用可定义子集运算而得到的：$\mathbf{L}(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathbf{L}_{\alpha}(\mathbb{R})$，其中 $\mathbf{L}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$，$\mathbf{L}_{\alpha+1}(\mathbb{R}) = Def(\mathbf{L}_{\alpha}(\mathbb{R}))$，$\mathbf{L}_{\gamma}(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathbf{L}_{\alpha}(\mathbb{R})$，若 γ 是极限序数。[65]

我们称 Γ 是点类（point-class），若 Γ 是具有某种复杂性的实数子集组成的集合，例如 Γ 是 $\Sigma^1_n(\Pi^1_n)$ 集。下面我们仅引入下文将讨论的几种实数集的正则特征（regularity property）[66]：完美集（perfect set）特征[67]、贝尔（Baire）特征[68]、勒贝格可测集（Lebesgue measurable set）[69]、统一化特征（uniformization property）[70]。一个自然的问题是：哪些实数子集的点类具有这些特征？

下面我们列出 19 世纪末 20 世纪初若干关于实数集正则特征的经典结果。康托尔-本迪克森（Cantor-Bendixson）证明了实数闭子集具有完美集特征；杨（William Young）证明了 Π^0_2 集具有完美集特征；卢津-苏斯林证明了 Σ^1_1 集具有完美集特征，贝尔特征且是勒贝格可测集；近藤元北（Motokiti Kondô）证明了 $Unif(\Sigma^1_2)$ 成立。[71] 以上结论都是在 **ZFC** 中可证的。我们知道，若实数子集 A 具有贝尔特征（是勒贝格可测集），则 A 的补集也具有贝尔特征（是勒贝格可测集）；但完美集特征和统一化特征对补运算并不是封闭的。之后，描述集合论的进展突然终止，如下是在 **ZFC** 中的未解问题[72]：是否所有 Π^1_1 集都有完美集特征，是否所有 Σ^1_2 集都有贝尔特征，且是勒贝格可测集？$Unif(\Pi^1_2)$ 是否成立？更一般地，以上结果是否可推广到更复杂的点类？例如，是否实数的所有投影子集都具有完美集特征、贝尔特征、统一化特征，且都是勒贝格可测集？事实上，在 **ZFC** 中我们很难将经典描述集合论的结果推广到更复杂的点类。卢津在 1925 年称，我们将永远无法

[65] 参见：Thomas Jech, *Set theory*。事实上，$X \subseteq \mathbb{R}$ 是投影集当且仅当 $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$。

[66] 关于实数子集的正则特征，参见：Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*。

[67] 我们称 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是完美集，若 A 是非空闭集且不包含孤立点（isolated point）。我们称 $A \subseteq \mathbb{R}$ 具有完美集特征，若它或者是可数集或者包含一个完美集。

[68] 我们称 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是无处稠密（nowhere dense）的，若 A 的闭包（closure）不包含开集；称 A 是微薄（meager）集，若 A 是无处稠密集的可数并；称 A 具有贝尔特征，若存在开集 B 使得 A 和 B 的对称差集（即 $(A-B)\cup(B-A)$）是微薄集。

[69] 我们称 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是勒贝格可测集，若 A 几乎是博雷尔集：即存在博雷尔集 B 使得 A 和 B 的对称差集的测度为零。

[70] 给定 $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$，我们称 A 统一化 B，若 $A \subseteq B$ 且 对任意的 $x \in \mathbb{R}$，存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $\langle x, y\rangle \in B$ 当且仅当唯一存在 y 使得 $\langle x, y\rangle \in A$。我们称点类 Γ 具有统一化特征（记为 $Unif(\Gamma)$），若对任意 $\mathbb{R}^2$ 的 Γ 子集 B，存在 Γ 子集 A 使得 A 统一化 B。

[71] Peter Koellner,“Large cardinals and determinacy”.

[72] Ibid.

知道是否实数的所有投影子集都具有这些正则特征。[73] 后来人们知道之所以很难在 **ZFC** 中解决这些问题，是因为这些问题是独立于 **ZFC** 的。

假设 $\mathbf{ZFC}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$，哥德尔证明了，存在 不具有贝尔特征的 Σ_2^1 集，存在勒贝格不可测的 Σ_2^1 集，存在不具有完美集特征的 Π_1^1 集。[74] 假设 $\mathbf{ZFC}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$，艾迪生（John W. Addison）证明了，对任意的 $n\geq 3, Unif(\Sigma_n^1)$ 成立。[75] 假设 **ZFC** 及存在不可及基数（inaccessible cardinal），[76]索洛韦（Robert M. Solovay）证明了：存在一力迫扩充（forcing extension）使得在其中实数的所有投影子集都有完美集特征和贝尔特征，且都是勒贝格可测集。[77] 列维（Azriel Lévy）证明了：存在 **ZFC** 的力迫扩充使得在其中 $Unif(\Pi_2^1)$ 不成立。[78] 由以上结论可见，如下命题都是独立于 **ZFC** 的：（1）所有 Σ_2^1 集 都具有贝尔特征；（2）所有 Σ_2^1 集都是勒贝格可测集；（3）所有 Π_1^1 集都具有完美集特征；（4）$Unif(\Pi_2^1)$ 成立。因此，若仅限于 **ZFC**，人们将永远无法解决这些问题。

连续统假设是在三阶算术中可表达的。哥德尔和科恩证明了，连续统假设是独立于 **ZFC** 的。在哥德尔和科恩之后，人们应用力迫法和内模型论（inner model theory）方法在经典数学的很多领域中（如分析、代数、数论、组合、图论、拓扑、数理逻辑等）发现了大量具有实在数学含义的独立于 **ZFC** 的数学命题。在其专著“布尔关系理论与不完全性”中，哈维-弗里德曼（Harvey Friedman）系统地研究并给出很多来自经典数学的独立性命题。[79]

关于独立性问题，数学家和数学哲学家分成了两个阵营：集合论中的多元主义（pluralism）与非多元主义。[80] 多元主义者认为，独立性命题削弱了集合论真理的客观性；尽管有实践的原因可解释为何一种集合理论比另一种集合理论更优越

---

[73] Peter Koellner,“Large cardinals and determinacy”.

[74] Ibid.

[75] Ibid.

[76] 我们称不可数基数 κ 是不可及基数，若 它是正则基数（regular cardinal）且 对任意的 $\lambda<\kappa, 2^{\lambda}<\kappa$。

参见：Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*.

[77] Peter Koellner, opcit.

[78] Ibid.

[79] Harvey M. Friedman, *Boolean Relation Theory and Incompleteness*, to appear in Lecture Notes in Logic, Association for Symbolic Logic. 更多关于独立性命题的研究，参见：（1） Andrey Bovykin, “Brief introduction to unprovability”, in: *Logic Colloquium: Lecture Notes in Logic 32*, 2006; (2) Harvey M. Friedman, opcit; (3) Yong Cheng, *Incompleteness for Higher-Order Arithmetic: An Example Based on Harrington's Principle*.

[80] 关于集合论中多元主义的讨论，参见：Peter Koellner, “Truth in Mathematics: The Question of Pluralism”, in: *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Bueno O., Linnebo ø (eds), Palgrave Macmillan, London, 2009。

（例如更有用），但没有一般的理论原因可解释此点。[81] 而非多元主义者认为，关于集合的真理是唯一且客观存在的，独立性命题仅表明我们现有公理系统表达能力的有限性，其不足以完全刻画关于集合的所有真理，但独立性命题有确定的真值。这两种哲学立场具体表现为关于集合论真理的反实在主义（Anti-Realism）与实在主义（Realism）之争。极端的反实在主义者认为：连续统假设既不真也不假，集宇宙的观念是个完全的虚构，集合论的定理不对应任何真正的数学实在。费弗曼（Solon Feferman）认为，连续统假设是内在模糊的，自然数集的所有子集组成的集合不是确定的数学对象；因此，连续统假设不是一个明确的数学命题。[82] 汉金斯（Joel David Hamkins）持温和的反实在主义观点。他认为，独立性命题表明有多种合理的集合观念，存在多个不同的集宇宙，独立性命题如 **CH** 在某些集宇宙中为真，在某些集宇宙中为假，独立性命题没有确定的真值。[83] 实在主义者认为，刻画集合真理的独立于人类认知的集宇宙是唯一客观存在的，在其中 **CH** 或者为真或者为假。集合论学家马吉多尔（Menachem Magidor），马丁（Donald A. Martin），斯蒂尔（John R. Steel），武丁则为集合论实在主义的不同形式作辩护，他们认为独立性命题例如 **CH** 有确定的真值，可通过集合论研究发现新的可解决 **CH** 的公理。[84]

基于对独立性问题的不同哲学观点可发展出不同的数学。集合论研究实践表明，基于实在主义观点可发展出丰富精深的数学理论。下文是在集合论实在主义的框架下讨论一种独立性问题的解决方案：哥德尔纲领。

四、哥德尔纲领

反实在主义者科恩认为，他和哥德尔的结论已有效地解决了 **CH**，答案是 **CH** 没有确定的真值：我们既可以采纳一种集合理论在其中 **CH** 是公理，也可以采纳一种集合理论在其中 $\neg$**CH** 是公理，不存在在这两种不兼容的理论中哪个是正确的理论的问题。[85] 实在主义者哥德尔不赞成科恩的观点。哥德尔认为，**CH** 的真值是客观存在的，**CH** 是独立于 **ZFC** 的事实仅表明 **ZFC** 不足以表达所有关于集合的真理；为了判定 **CH** 的真值，我们需要增加足以解决 **CH** 并得到有力辩护的关于无穷的新公理。[86] 后来学者们将哥德尔的这一想法概括为哥德尔纲领，其目标是找到得到有力辩护的能解决独立性问题的新公理。[87] 斯蒂尔认为，对哥德

---

[81] Peter Koellner,“The Continuum Hypothesis”, in: *The stanford encyclopedia of philosophy*, ed. Edward N. Zalta. http://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/continuum-hypothesis/. 2013.

[82] Solomon Feferman,“Is the Continuum Hypothesis a definite mathematical problem”?, EFI lecture series, 2012, http://logic.harvard.edu/efi.php.

[83] Joel David Hamkins,“The set-theoretic multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, Volume 5, Issue 3, pp. 416-449, 2012.

[84] 参见：（1）Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”;（2）W. Hugh Woodin, “The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture”, in: *Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics Theorems*, Philosophies, pp. 13-42, 2011。

[85] Peter Koellner,“The Continuum Hypothesis”.

[86] K. Gödel,“What is Cantor's Continuum Problem”? *American Mathematical Monthly* 54, 515-525, 1947.

[87] 斯蒂尔称，哥德尔纲领的目标是在得到有力辩护的 **ZFC** 的扩充理论中判定独立于 **ZFC** 的数学上有趣

尔纲领的研究提供了数学认识论研究的一个有趣案例；数学认识论研究对寻求 **CH** 的答案具有重要的指导意义，因为解决 **CH** 的任何答案都取决于对一个哲学问题的理解：什么是 **CH** 的答案。[88] 对于寻找解决独立性命题的新公理，一种逐步渐进的方式是：先寻找解决具有较低复杂性的独立性命题的新公理，再寻找解决具有更高复杂性的独立性命题的新公理。本文仅讨论解决关于二阶算术的独立性命题和连续统假设的新公理的选择。

在 4.1 节中，我们概括总结文献中关于新公理选择的启发性原则。本节关于新公理选择原则的讨论是综述性质的，限于篇幅我们无法详细讨论这些原则，而只列出主要文献。人们已发现一些可解决某些独立性命题的不同公理：如决定性公理、大基数公理、$\mathbf{V}=\mathbf{L}$、力迫公理。在 4.2-4.3 节中，我们讨论可有效解决经典描述集合论中关于二阶算术的独立性命题的两类新公理：决定性公理和大基数公理。在 4.4-4.5 节中，我们讨论可判定 **CH** 的两类公理：$\mathbf{V}=\mathbf{L}$、力迫公理。4.2-4.5 节中讨论的四类公理在集合论中具有丰富的结论。4.2-4.5 节的重点不是概述这些公理的结论，而是基于 4.1 节中新公理的选择原则讨论这些公理能否有效地解决连续统假设及在二阶算术中可表达的独立性命题。

4.1 新公理的选择原则

为了解决独立性问题，我们需要增加新公理，但如何找到集合论的正确新公理呢？哥德尔认为，我们应有充足的理论原因解释为何应选择某种新公理，且可基于数学直觉和理性的标准找到选择新公理的原则[89]。在经典论文“什么是康托尔的连续统问题”中，哥德尔提出了公理的两种辩护形式：内在辩护（Intrinsic Justification）和外在辩护（Extrinsic Justification）。[90]

哥德尔的内在辩护是基于对集合概念的分析。大基数可通过初等嵌入（elementary embedding）来定义，其定义的一般模板是：存在某传递类 M 和非平凡（non-trivial）的初等嵌入 $j:\mathbf{V}\to M$。[91] 很多大基数对应于具有某种性质的初等嵌入的临界点（critical point）[92]。哥德尔基于内在辩护论证了较弱的大基数

的问题。参见：J. R. Steel, “Gödel's Program”, in: *Interpreting Gödel: Critical Essays.* J. Kennedy edited, pp. 153-179. Cambridge University Press, Cambridge, 2014。

[88] J. R. Steel, opcit.

[89] K. Gödel,“What is Cantor's Continuum Problem”?

[90] Ibid.

[91] 令 X 和 Y 是传递集，称函数 $f:X\to Y$ 是初等嵌入，若对任意的公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $a_0,\cdots,a_n\in X$，我们有：$(X,\in)\vDash\varphi[a_0,\cdots,a_n]$ 当且仅当 $(Y,\in)\vDash\varphi[f(a_0),\cdots,f(a_n)]$。称初等嵌入是非平凡的，若其不是恒等映射。

[92] 初等嵌入 f 的临界点是最小的序数 α 使得 $f(\alpha)\neq\alpha$，记为 $Crt(j)$。在大基数的定义模板中，若 M 和 $\mathbf{V}$ 更接近，则我们得到更强的大基数。特别地，我们可通过加强传递类 M 的封闭性条件来定义更强的大基数。若我们要求 $M=\mathbf{V}$，则可得到在初等嵌入定义模板下最强的大基数。但库能（Kunen）在 **ZFC** 中 证明了不存在从 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}$ 的非平凡的初等嵌入。这一结果揭示了通过初等嵌入定义大基数的方法的限度。参见：Peter Koellner, “Independence and large cardinals”, in *The stanford encyclopedia of philosophy* ed.

如不可及基数，马洛基数（Mahlo cardinal）[93]的合理性。[94] 哥德尔认为，集合论的公理并未形成一个自身封闭的系统，而是恰恰相反，基于集合的迭代观念（the iterative conception of set）我们可以一种自然的方式扩充 **ZFC** 。[95] 哥德尔写道："以不可及基数和马洛基数为例，这些公理清楚地表明，虽然我们所使用的集合论公理系统是不完全的，但它可以非任意的方式通过增加新公理而得到扩充"。[96] 哥德尔认为这些新公理具有内在的必然性，因为这些公理是可基于集合的迭代观念而得到内在辩护的。[97]

哥德尔指出，尚不清楚较强的大基数如可测基数（measurable cardinal）[98]是否和马洛基数一样是可基于集合的迭代观念而得到辩护的。[99] 然而，哥德尔提出另一种辩护形式：外在辩护。[100] 哥德尔写道："即使不考虑一些新公理的内在必然性，即使新公理没有内在必然性，关于新公理的真理的另一种可能判定方式是研究这些新公理的成功性，即可验证的结论的丰富性"。[101] 如下是哥德尔的一个著名段落："可能存在这样一些公理，它们有丰富的可验证的结论，影响整个领域的发展，提供解决问题的强有力的工具（若可能的话，甚至可构造性地解决问题），以至于不管它们是否是内在必然的，它们必须如同任何成熟的物理理论一样被接受。"[102]

比较这两种辩护方式，内在辩护更符合传统的数学观念，似乎比外在辩护更可靠。科尔纳（Peter Koellner）讨论了内在辩护的局限性，并论证了内在辩护对于发现数学新公理是很有限的，最终我们必须借助于外在辩护。[103] 集合论研究实践表明，更有成效且具有更大应用前景的是外在辩护方法。传统观点认为公理应是自明地，这种要求是太过于主观且是限制性的。集合论的发展更新了人们对自明性的看法，人们对公理的自明性的认识是渐进地而不是先天具有的。

关于集合论新公理的选择，文献中已有较多的讨论。多数集合论学者认为 集合理论是可比较和选择的。问题的关键在于如何选择更好的集合理论？不同学者间的差异也主要是在这点上。马吉多尔认为，集合理论的选择是基于数学证据的，我们可提供洞见和标准找到更好的集合理论。[104] 在马吉多尔看来，集合论学家的任务是在大量不同的集合理论中，以理性的方法选择数学上结论更丰富，长远

Edward N. Zalta. http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/independence-large-cardinals/2011.

[93] 我们称不可数基数 κ 是马洛基数，若 κ 是不可及基数且对任意的 $X \subseteq \kappa$ ，若 X 是无界闭子集(unbounded closed set)，则存在 $\alpha \in X$ 使得 α 是不可及基数。参见：Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*.

[94] K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem"?

[95] Ibid.

[96] K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem"?, p.520.

[97] Ibid.

[98] 我们称 κ 是可测基数，若存在从 $\mathbf{V}$ 到某一传递类 M 的非平凡的初等嵌入 $j:\mathbf{V}\to M$ 使得 $\kappa = Crt(j)$ 。

[99] K. Gödel, opcit.

[100] Ibid.

[101] K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem"?, p. 521.

[102] Ibid.

[103] Peter Koellner, "On reflection principles" , *Annals of Pure and Applied Logic*, 157(2), 206-219, 2009.

[104] M. Magidor, "Some set theories are more equal", EFI lecture series, 2012, http://logic.harvard.edu/efi.php.

上更可接受的集合理论。[105] 马吉多尔提出一些选择新公理的启发性原则：例如，新公理应尽量直观或有哲学意义；新公理应可解决更多的独立性问题；新公理应为一些重要的问题提供连贯、优美的理论；新公理应有可验证的丰富结论；新公理应能将力迫法的影响降低至最小。[106] 麦迪（Penelope Maddy）提出一种新公理选择的方法论原则：极大性原则。[107] 哥德尔指出，$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 表达一种极小性特征，我们可设想一种新公理，其表达一种集宇宙的极大性特征；哥德尔认为，只有极大性特征才是和集合的观念相协调的。[108] 关于极大性的方法论原则，在集合论哲学的文献中有较多的讨论。[109] 林甘奈尼（Shivaram Lingamneni）更精细地区分了三种极大性原则：极大化结构、极大化集合、极大化解释力量。[110] 斯蒂尔认为，对集合论基础研究很有用的一个方法论极大性原则是极大化解释力量（或一致性强度）。[111]

4.2 决定性公理

20 世纪 70-80 年代的研究表明，有两类公理它们在解决关于实数可定义子集的独立性命题方面是很有成效的：决定性公理和大基数公理，这两类公理带来描述集合论的重生。我们将讨论决定性公理和大基数公理如何可有效地解决经典描述集合论中的独立性命题，及这两类公理间的关联。下面，我们先讨论决定性公理。[112]

公理 **AD** 是由迈希尔斯基（Jan Mycielski）和斯坦豪斯（Hugo Steinhaus）在 1962 年引入的。

定义 1 (**AD**) 给定 $A\subseteq\mathbb{R}=\omega^{\omega}$， 考虑如下的两人游戏 G_A，其中游戏者 I 和 II 轮流地选择一个自然数。[113]

$$
\begin{array}{llllllll}
G_A: & \mathrm{I} & x(0) & & x(2) & \cdots & x(2t) & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & x(1) & x(3) & & x(2t+1) & \cdots
\end{array}
$$

此游戏的一轮后我们得到一实数 $x\in\omega^{\omega}$。 若 $x\in A$，我们称游戏者 I 赢得游戏

[105] Ibid.

[106] Ibid.

[107] Penelope Maddy, *Naturalism in mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1997.

[108] K. Gödel, “What is Cantor's Continuum Problem”?

[109] 参见：（1）Penelope Maddy, *Naturalism in mathematics*；（2）Penelope Maddy, *Defending the axioms: On the philosophical foundations of set theory*, Oxford University Press, 2011。

[110] Shivaram Lingamneni, “Can we resolve the continuum hypothesis”? Synthese, 197: 599-622, 2020.

[111] J. R. Steel, “Gödel's Program”. 更多关于集合论新公理的讨论，参见：（1）Penelope Maddy, *Naturalism in mathematics*；（2）Penelope Maddy, *Defending the axioms: On the philosophical foundations of set theory*；（3）W. Hugh Woodin, “In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 23, Number 1, 2017。

[112] 更多关于决定性公理的讨论，参见：（1）Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*；（2）Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*。

[113] 本文中，我们将实数集 $\mathbb{R}$ 等同于自然数的所有可数序列组成的集合 ω^{ω}。

G_A；若 $x \notin A$，我们称游戏者 II 赢得游戏 G_A。游戏者 I 的获胜策略是指不管游戏者 II 怎么出自然数，只要游戏者 I 按此策略出自然数就总能保证游戏者 I 在每局都能赢得游戏 G_A。我们称 A 是决定集（determined set），若至少有一位游戏者具有赢得游戏 G_A 的获胜策略。公理 **AD** 称 $\mathbb{R}$ 的任意子集都是决定集。

然而，公理 **AD** 与选择公理 **AC** 相矛盾，因此 **AD** 不能作为集合论的公理。索洛韦 和 竹内外史（Gaisi Takeuti）指出，若把公理 **AD** 限制到 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 上，这与 **AC** 不相矛盾。[114] 决定性公理称具有某种复杂性的实数子集都是决定集。对点类 Γ，令 $Det(\Gamma)$ 表示 Γ 中的实数子集都是决定集。例如，$Det(\Delta_1^1)$ 表示所有的博雷尔集都是决定集。公理 **PD** 称实数的所有投影子集都是决定集，公理 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 称所有 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中的实数子集都是决定集。

我们在 **ZFC** 中可证明实数的很多投影子集是决定集。马丁在 **ZFC** 中证明了 $Det(\Delta_1^1)$ 成立。假设点类 Γ 是 Σ_n^1 集（或 Π_n^1 集或 Δ_n^1 集）。巴纳赫-马祖尔-奥克托比（Banach-Mazur-Oxtoby）证明了：若 $\mathbf{ZFC} + Det(\Gamma)$ 成立， 则 Γ 中的实数子集都具有贝尔特征；斯维尔茨科夫斯基（Mycielski-Swierczkowski）证明了：若 $\mathbf{ZFC} + Det(\Gamma)$ 成立，则 Γ 中的实数子集都是勒贝格可测集；戴维斯（Davis）证明了：若 $\mathbf{ZFC} + Det(\Gamma)$ 成立， 则 Γ 中的实数子集都具有完美集特征。[115] 因此，若 **PD** 成立，则实数的所有投影子集都具有贝尔 特征和完美集特征，且都是勒贝格可测集。若 **PD** 成立，实数的所有投影子集也都具有统一化特征。[116]

定理 1 [武丁] 假设 **ZFC** 和 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立，则 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中的任意实数子集都有完美集特征和贝尔特征，都是勒贝格可测集，且 $Unif(\Sigma_1^2)$ 在 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中成立。[117]

定理 1 表明：若 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立，我们可将在 **ZFC** 中可证的较低复杂性的可定义实

---

114 Peter Koellner,“Large cardinals and determinacy”.

115 Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*.

116 Peter Koellner, opcit.

117 Σ_1^2 集的定义与 Σ_1^1 集的定义类似，区别仅在于 Σ_1^2 集中量词的量化对象是实数子集而不是实数。参见：Peter Koellner,“Large cardinals and determinacy”.

数子集具有的正则特征推广到$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中的任意实数子集。武丁的如下漂亮深刻的定理表明这一结论的逆命题也成立。

定理 2 [武丁] 若$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中的任意实数子集都是勒贝格可测集，具有 贝尔 特征，且$Unif(\Sigma_1^2)$在$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中成立，则$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$成立。

我们称命题ϕ是关于理论T的一个“好”公理，若假设$\mathbf{ZFC}+\phi$，理论T具有某种良好的性质，且若理论T具有此良好性质，则ϕ成立。科尔纳和武丁在他们的工作中都使用过这种模式论证一个命题是关于某种理论的“好”公理。[118] 由以上定理，我们可称$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$是关于$\mathbf{L}(\mathbb{R})$的实数理论的一个“好”公理。[119]

集合论的研究实践表明，公理$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$对于解决关于$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中的实数子集的独立性命题是很有效的。很多证据表明，$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$是关于$\mathbf{L}(\mathbb{R})$的实数理论的“恰当”公理，公理$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$对于解决关于$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中实数子集的独立性命题是很有效的。基于科尔纳的工作，公理$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$有如下优点[120]：第一，假设$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$，我们可将在$\mathbf{ZFC}$中可证的实数子集的正则特征自然地推广到$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中的任意实数子集，我们可证明关于$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中实数子集的丰富漂亮的结构性质。进一步，定理 2 表明$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$对于证明$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中实数子集的正则特征而言是必要的。第二，假设$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$，我们可解决所有已知的关于$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中实数子集的独立性命题。第三，很多来自不同领域的理论（甚至是不兼容的理论）都蕴涵$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$成立。[121] 事实上，我们有一种用

---

118 参见：（1）Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”；（2）Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”。

119 因为假设$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$，$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中的任意实数子集都具有某些正则特征；另一方面，若$\mathbf{L}(\mathbb{R})$中的任意实数子集都具有这些正则特征，则$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$成立。

120 Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”.

121 例如，命题“存在ω_1上的ω_1-稠密的理想（ω_1-dense ideal on ω_1）”与力迫公理$\mathbf{PFA}$（proper forcing axiom）是互不兼容的。而武丁证明了：假设$\mathbf{ZFC}$及存在ω_1上的ω_1-稠密的理想，则$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$成立；斯

来证明其他理论蕴涵 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 的一般方法：核模型归纳法（core model induction），[122] 这种方法甚至可用于互不兼容的理论，这表明公理 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 在某种意义上是不可避免的。[123]

4.3 大基数公理

本节我们讨论大基数公理对实数子集的正则特征的影响，大基数公理和决定性公理间的关联，及大基数公理的优点。[124]

下面我们先讨论大基数公理对实数子集的正则特征的影响。索洛韦证明了：假设 $\mathbf{ZFC}$ 及存在可测基数，则所有的 Σ_2^1 集都具有完美集特征和贝尔特征，且都是勒贝格可测集。[125] 谢拉（Saharon Shelah）-武丁证明了[126]：假设 $\mathbf{ZFC}$ 及存在 n 个武丁基数（Woodin cardinal）及一个比 这 n 个武丁基数都大的可测基数，则所有的 Σ_{n+2}^1 集都具有完美集特征和贝尔特征，且都是勒贝格可测集。[127] 以上结论表明，假设存在可数个武丁基数，我们可证明实数的所有投影子集都具有正则特征。

一个自然的问题是：大基数公理是否蕴涵决定性公理？如下结论表明，答案是肯定的。马丁证明了：假设 $\mathbf{ZFC}$ 及存在可测基数，则 $Det(\Pi_1^1)$ 成立。[128] 马丁-斯蒂尔证明了： 假设 $\mathbf{ZFC}$ 和存在 n 个武丁基数及一个比这 n 个武丁基数都大的可测

蒂尔证明了：假设 $\mathbf{ZFC}+\mathbf{PFA}$ 成立，则 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立。参见：Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”。

[122] 核模型归纳法是内模型论中的一种很技术的方法，参见：Ralf Schindler & John Steel, “The core model induction”, 2014. https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/core-model-induction.pdf.

[123] 和 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 不同的是，$\mathbf{CH}$ 并非被不同的充分强的自然理论所蕴涵。参见：（1）Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”;（2）Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”。

[124] 更多关于大基数公理的讨论，参见：Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*。

[125] Peter Koellner,“Large cardinals and determinacy”.

[126] Ibid.

[127] 我们称 κ 是武丁基数，若 κ 是不可及基数，且对任意的 $A\subseteq\mathbf{V}_\kappa$，存在基数 $\kappa_A<\kappa$ 使得对任意满足 $\kappa_A<\eta<\kappa$ 的序数 η，我们有：存在从 $\mathbf{V}$ 到某一传递类 M 的初等嵌入 $j:\mathbf{V}\to M$ 使得 $Crt(j)=\kappa_A, j(\kappa_A)>\eta, \mathbf{V}_\eta\subseteq M$ 且 $j(A\cap\mathbf{V}_{\kappa_A})\cap\mathbf{V}_\eta=A\cap\mathbf{V}_\eta$ 。参见：Peter Koellner, “Independence and large cardinals”。

[128] Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”.

基数，则 $Det(\Pi^1_{n+1})$ 成立。[129] 作为此结论的一个推论，若存在可数个武丁基数，则 $\mathbf{PD}$ 成立。马丁-斯蒂尔-武丁证明了：假设 $\mathbf{ZFC}$ 和存在 ω 个武丁基数及一个比这些武丁基数都大的可测基数，则 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立。[130] 武丁证明了：假设 $\mathbf{ZFC}$ 和存在一真类武丁基数（a proper class of Woodin cardinals），则所有的普遍贝尔集（universally Baire sets）[131]是决定集。[132]

集合论的研究揭示了决定性公理和大基数公理间的紧密关联。哈灵顿（Leo Harrington）-马丁 证明了：$Det(\Pi^1_1)$ 等价于对任意的实数 $x, x^\#$ 存在。[133] 武丁证明了公理 $\mathbf{PD}$ 是和如下命题等价的：对任意的自然数 n，存在一个可数传递集 M 使得 $\langle M, \in\rangle \vDash \mathbf{ZFC}+$ 存在 n 个武丁基数， 且 M 是可数可迭代的（countably iterable）。[134] 进一步，武丁证明了公理 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 是和如下命题等价的：[135] 在 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中，对任意的 $S \subseteq Ord$，存在内模型 M 及 $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 使得 $S \in M$ 且 $M \vDash \alpha$ 是武丁基数。[136]

我们称公式 φ 具有力迫绝对性（generic absoluteness），若对任意的偏序集 P，若 $G \subseteq P$ 是脱殊滤，则 $V \vDash \varphi$ 当且仅当 $V[G] \vDash \varphi$。[137] 肖恩菲尔德（Joseph R. Shoenfield）证明了 Σ^1_2 语句具有力迫绝对性。[138] 马丁-索洛韦证明了，若存在一真类可测基数，则 Σ^1_3 语句具有力迫绝对性。[139]

---

[129] Ibid.

[130] Ibid.

[131] 普遍贝尔集是比 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中的实数子集更广泛的一类实数子集，其定义参见：W. Hugh Woodin, “Suitable extender models I”, *Journal of Mathematical Logic*, 10: 101-339, 2010。

[132] Peter Koellner, opcit.

[133] $x^\#$ 是大基数 $0^\#$ 相对化于实数 x 上所得到的。参见：Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*。

[134] Peter Koellner,“Large cardinals and determinacy”. 可数可迭代 是内模型论中的一个技术性概念，其定义参见：Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*。

[135] W. Hugh Woodin, “Suitable extender models I”.

[136] 作为此结论的一个推论，若 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立，则存在内模型 N 使得 $N \vDash$ 存在可数个武丁基数。

[137] Peter Koellner, opcit.

[138] Thomas Jech, *Set theory*.

[139] Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”.

定理 3 [武丁] 假设 **ZFC** 及存在一真类武丁基数。令 φ 是 语句，P 是偏序集，且 $G \subseteq P$ 是脱殊滤，则 $\mathbf{L}(\mathbb{R}) \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathbb{R})^{V[G]} \vDash \varphi$ 。

由定理 3，若存在一真类武丁基数，则 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 的理论具有力迫绝对性。[140] 进一步，武丁证明了：假设 **ZFC** 及存在一真类不可及基数，若 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 的理论具有力迫绝对性，则 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立。[141] 因此，$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 对于证明 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 理论的力迫绝对性也是必要的。

解释（interpretation）的概念为我们提供了一种比较不同语言中的形式理论的方法。令 S 和 T 是递归可枚举（recursively enumerable）的形式理论，非形式地说，我们称理论 S 是在理论 T 中可解释的，若 S 中的非逻辑符号和量词的辖域都在 T 中可定义，使得 S 的公理在此解释下在 T 中对应的公式在 T 中可证。[142] 给定理论 S 和 T，我们用 $S \leq_I T$ 表示 S 在 T 中可解释，用 $S <_I T$ 表示 S 在 T 中可解释但 T 不在 S 中可解释。 我们称理论 S 和 T 是相互可解释的（记为 $S \equiv_I T$ ），若 $S \leq_I T$ 且 $T \leq_I S$ 。递归可枚举理论的解释度结构（the degree of interpretation）是很复杂的。通过元数学的技术，我们可构造在解释度意义上两两不可比较的理论；任给理论 T_1 和 T_2 使得 $T_1 <_I T_2$，我们可构造理论 T 使得 $T_1 <_I T <_I T_2$ 。[143] 因此，理论的解释度结构既不是线性序也不是良基的。[144] 然而，令人惊讶地是，若我们限制到数学中自然出现的理论，则这些理论的解释度结构是较简单的：这些自然的数学理论在解释度意义上是可比较的。[145]

通过考虑可解释性，科尔纳提出语句 φ 的三种独立于理论 T 的方式：[146]

[方式一] $T+\varphi >_I T$ 且 $T+\neg\varphi \equiv_I T$，其中 φ 与 $\neg\varphi$ 可互换。

[方式二] $T+\varphi \equiv_I T$ 且 $T+\neg\varphi \equiv_I T$ 。

---

140 事实上，这种力迫绝对性可推广到更强的理论，参见：Peter Koellner, opcit。

141 Peter Koellner, opcit。

142 关于解释概念的精确定义，参见： Albert Visser, Can we make the second incompleteness theorem coordinate free? Journal of Logic and Computation, 21(4), 543-560, 2011。

143 Peter Koellner, “Independence and large cardinals”.

144 即存在理论在解释度意义上的无穷下降链。

145 Peter Koellner, “Independence and large cardinals”.

146 Peter Koellner, “Independence and large cardinals”.

[方式三] $T+\varphi >_I T$ 且 $T+\neg\varphi >_I T$ 。

上述三种方式都有基于元数学构造的实例。[147] 一个自然的问题是，是否有满足以上三种方式的自然的数学例子。在集合论中存在很多满足前两种类型的独立性命题的自然例子。谢拉证明了 $\mathbf{ZFC+PM}$ 蕴涵 $\mathbf{ZFC}$ 的一致性。[148] 因此，由第二不完全性定理，$\mathbf{ZFC+PM}$ 在 $\mathbf{ZFC}$ 中是不可解释的。事实上，$\mathbf{ZFC+PM}$ 和 "$\mathbf{ZFC+}$ 存在不可及基数" 是相互可解释的。[149] 哥德尔证明了 $\neg\mathbf{PM}$ 在 $\mathbf{L}$ 中成立，因此，$\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{PM}$ 和 $\mathbf{ZFC}$ 是相互可解释的。因此，$\mathbf{ZFC} <_I \mathbf{ZFC+PM}$ ，且 $\mathbf{PM}$ 是第一种类型的独立性命题。力迫法和内模型论方法可为我们提供自然的第二种类型的独立性命题。哥德尔和科恩的结果证明了 $\mathbf{ZFC+CH}$ 及 $\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH}$ 都是和 $\mathbf{ZFC}$ 相互可解释的。因此，$\mathbf{CH}$ 是第二种类型的独立性命题。在集合论中，人们目前尚未发现第三种类型的独立性命题。[150]

我们称一集合论语句 φ 是类似于 $\mathbf{CH}$ ，是指 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 和 $\mathbf{ZFC}+\neg\varphi$ 都和 $\mathbf{ZFC}$ 相互可解释；称一集合论语句 φ 是类似于 $\mathbf{PM}$ ，是指 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 与 $\mathbf{ZFC}+\neg\varphi$ 中的一个是和 $\mathbf{ZFC}$ 相互可解释，而另一个是和 $\mathbf{ZFC+}$ 某种大基数公理相互可解释。已知的集合论的独立性命题或者是类似于 $\mathbf{PM}$ 或者是类似于 $\mathbf{CH}$ 。[151]

大基数公理提供了一种衡量自然理论的强度的方法。一个令人惊讶的经验事实是，$\mathbf{ZFC}$ 的任何自然扩充都和 "$\mathbf{ZFC+}$ 某一大基数公理" 相互可解释：对于集合论中的任意自然命题 φ，我们一般可找到一个大基数公理 Φ 使得 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 和 $\mathbf{ZFC}+\Phi$ 是相互可解释的。[152] 我们通常可使用力迫法和内模型论方法证明这点。[153]

大基数公理提供了一种比较 $\mathbf{ZFC}$ 的不同自然扩充的方法。任给来自不同领域的两个自然理论 $\mathbf{ZFC}+\phi$ 和 $\mathbf{ZFC}+\varphi$，我们可找到大基数公理 A 和 B 使得 $\mathbf{ZFC}+\phi$ 和 $\mathbf{ZFC}+A$ 相互可解释，且 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 和 $\mathbf{ZFC}+B$ 相互可解释。最后，我们可通过比较 $\mathbf{ZFC}+A$ 和 $\mathbf{ZFC}+B$ 的解释度强度来比较 $\mathbf{ZFC}+\phi$ 和 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 的解释度强

[147] 例如，对 $\mathbf{PA}$ 的任意递归扩充的一致理论 T ，$Con(T)$ 是满足以上第一种方式的例子，其中 $Con(T)$ 是表达 T 的一致性的算术语句。

[148] Peter Koellner, opcit. 我们用 $\mathbf{PM}$ 指称如下命题：实数的所有投影子集都是可测集。

[149] Peter Koellner, opcit.

[150] Ibid.

[151] Ibid.

[152] Ibid.

[153] 例如，对大基数公理 Φ 和自然命题 φ ，为证明 $\mathbf{ZFC}+\Phi$ 解释 $\mathbf{ZFC}+\varphi$，我们通常是从 $\mathbf{ZFC}+\Phi$ 的模型出发使用力迫法构造 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 的模型；为证明 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 解释 $\mathbf{ZFC}+\Phi$ ， 我们通常是使用内模型论的方法从 $\mathbf{ZFC}+\varphi$ 的模型出发构造 $\mathbf{ZFC}+\Phi$ 的模型。参见：Peter Koellner, opcit。

度。[154] 因此，使用力迫法和内模型论方法，完全不同领域中的自然理论，通过大基数公理，在解释度意义上是可相互比较的。对于来自不同领域的理论 $\mathbf{ZFC}+\phi$ 和 $\mathbf{ZFC}+\varphi$，通常很难找到它们之间的直接解释，我们必须通过大基数来建立这些迥异的理论在解释性上的关联。

科恩之后的集合论研究告诉我们，大基数公理是相当成功的，一方面，它解决了很多独立于 $\mathbf{ZFC}$ 的问题；另一方面，独立性命题的不可解度可由大基数公理来刻画，这表明了大基数公理在集合论中的中心地位。[155] 在武丁看来，这个重要发现有力地反驳了怀疑论者认为独立性命题没有意义的观点。[156]

集合论研究表明，大基数公理具有如下优点[157]。第一，大基数公理可判定关于 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中实数子集的自然问题，提供 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 的丰富优美的结构理论。假设大基数，在 $\mathbf{ZFC}$ 中可证的实数子集的性质可以一种自然的方式推广到 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中的任意实数子集。第二，大基数公理是经验上完全的：经验表明大基数公理解决了所有已知的在二阶算术中可表达的独立性命题，不存在二阶算术中的语句使得我们可通过力迫法证明此语句是独立于理论"$\mathbf{ZFC}+$存在任意大的武丁基数"的。一个非凡的事实是：大基数公理对于解决复杂度比 $\mathbf{CH}$ 低的独立性命题是很成功的。第三，大基数公理提供了一种刻画 $\mathbf{ZFC}$ 的自然扩充理论的强度的尺度，和比较 $\mathbf{ZFC}$ 的不同自然扩充理论的解释度的方法。第四，在大基数公理下，$\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 的理论具有力迫绝对性。这表明，在大基数公理下，力迫法不能被用来证明某一 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 理论中的语句是独立于 $\mathbf{ZFC}+$大基数公理的。 一个自然的问题是：大基数公理能否解决 $\mathbf{CH}$？哥德尔提出大基数公理作为集合论的候选公理，并猜想大基数公理可以解决连续统假设。[158] 然而，答案是否定的。

定理 4 [列维−索洛韦] 假设 κ 是可测基数，P 是一偏序集，且 $|P|<\kappa$。则若 $G\subseteq P$ 是脱殊滤，则 $V[G]\vDash\kappa$ 是可测基数。

因为使用较小偏序集的力迫法可以改变连续统的大小，可测基数不能解决 $\mathbf{CH}$。类似的论证可以证明，所有已知的大基数公理都不能解决 $\mathbf{CH}$。虽然大基数公理可以有效地解决复杂度比 $\mathbf{CH}$ 低的独立性命题（如关于实数的投影子集的性质），但根据列维-索洛韦的结果，已知的大基数公理不能解决 $\mathbf{CH}$。

[154] Peter Koellner, "Independence and large cardinals".
[155] Ibid.
[156] W. Hugh Woodin, "The transfinite universe", EFI lecture series, 2009, http://logic.harvard.edu/efi.
[157] Peter Koellner, opcit.
[158] K. Gödel, "What is Cantor's Continuum Problem"?

4.4 公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$

哥德尔的可构成集$\mathbf{L}$具有精细优美的数学结构。假设公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$可解决集合论中的很多独立性命题。例如，如下命题都是独立于**ZFC**的：广义连续统假设(**GCH**)、苏斯林假设（Suslin's hypothesis）、**PM**。公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$可解决这些独立性命题：例如**GCH**在$\mathbf{L}$中成立，苏斯林假设和**PM**都在$\mathbf{L}$中不成立。[159]

但我们能否接受$\mathbf{V}=\mathbf{L}$作为集合论的新公理？斯科特（Dana Scott）证明了，若存在可测基数，则$\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$。[160] 因此，$\mathbf{L}$不能容纳可测基数及比其更强的大基数。在多数集合论学家看来，公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$是限制性的，它限制我们只考虑一个集合的可定义的子集而非任意的子集。公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$表达了一种集合生成的极小性原则，而如哥德尔所称，只有一种极大性原则才与集合的迭代观念相吻合。这是武丁及很多集合论学家不接受$\mathbf{V}=\mathbf{L}$作为集合论公理的主要原因。另一方面，虽然公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$和**PD**都可为实数的投影子集提供丰富的结构理论，但是公理**PD**比公理$\mathbf{V}=\mathbf{L}$提供关于实数的投影子集更优美的结构理论：假设**PD**，实数的所有投影子集都具有贝尔特征和完美集特征，且都是勒贝格可测集；而在$\mathbf{L}$中，并非实数的所有投影子集都具有正则特征。[161] 更多关于为何$\mathbf{V}=\mathbf{L}$不被接受作为集合论的公理的分析，参见麦迪的论文。[162]

4.5 力迫公理

力迫公理包括马丁公理（**MA**），恰当力迫公理（**PFA**, Proper Forcing Axiom），马丁极大公理（**MM**, Martin's Maximum）。给定无穷基数κ和一类偏序集$\mathcal{K}$，力迫公理的一般形式$FA_\kappa(\mathcal{K})$可表述为：对任意的$\mathbb{P}\in\mathcal{K}$及任意由$\mathbb{P}$的稠密子集组成的基数为κ的集合$\mathcal{D}$，存在$G\subseteq\mathbb{P}$使得G是$\mathcal{D}$的脱殊滤（即对任意的$D\in\mathcal{D}$，$G\cap D\neq\varnothing$）。公理模式$FA_\kappa(\mathcal{K})$可看作表达了一种相对于$\mathcal{K}$中偏序集的关于力迫的一种极大性原则。马丁公理**MA**是$FA_{\omega_1}(\mathcal{K})$，其中$\mathcal{K}$是具有可数链条件（countable chain condition）的偏序集组成的类。恰当力迫公理**PFA**是$FA_{\omega_1}(\mathcal{K})$，其中$\mathcal{K}$是由具有恰当（properness）特征的偏序集组成的类。公理**MM**是$FA_{\omega_1}(\mathcal{K})$，其中$\mathcal{K}$是由具有保持$\omega_1$的所有稳定子集（stationary set）的偏序集组成的类。

---

[159] Thomas Jech, *Set theory*.

[160] Ibid.

[161] 例如分别存在不具有贝尔特征，不具有完美集特征，勒贝格不可测的实数的投影子集。参见：Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”.

[162] Penelope Maddy, “Does $\mathbf{V}$ Equal $\mathbf{L}$?”, *The Journal of Symbolic Logic,* Vol. 58, No. 1, pp. 15-41, 1993.

马丁公理适用于可数链条件的偏序集，**PFA** 和 **MM** 适用于更大一类的偏序集。[163] 力迫公理可看作贝尔范畴定理（Baire category theorem）的自然推广形式。[164] 形如 **MM** 的力迫公理是非构造性的。直观地说，力迫公理表达某种饱和特征。福尔曼（Matthew Foreman）-马吉多尔-谢拉 证明了：若 **MM** 成立，则 **CH** 不成立，且 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$。[165] 武丁证明了，若 **MM** 成立，则 **PD** 成立；[166] 这一结论建立了力迫公理与决定性公理间的关联。假设力迫公理，我们有关于三阶算术的力迫绝对性结论。[167] 力迫公理可有效地解决关于三阶算术的问题；特别地，假设 **MM**，我们可解决很多关于三阶算术的独立性命题。[168] 但福尔曼-马吉多尔-谢拉 证明了，若存在一个超紧基数（supercompact cardinal），则 **MM** 是一致的。[169] 更多关于力迫公理的讨论，参见《集合论手册》。[170]

五、连续统假设

由第 4 节，我们可以说哥德尔纲领对于解决可在二阶算术中表达的独立性命题是成功的，我们已找到可解决所有已知的在二阶算术中可表达的独立性命题的新公理。连续统假设是在三阶算术中可表达的一个很特别的独立性命题，其是在逻辑和哲学上都很重要的集合论中的核心未解问题之一。可以说，哥德尔纲领是否成功取决于我们能否找到得到有力辩护的解决连续统假设的新公理。

连续统假设有不同的等价形式，这里我们仅讨论如下的常见形式：实数的任意无穷子集或者是与自然数集具有相同的大小，或者是与实数集具有相同的大小。[171] 我们称 **CH** 对某类实数子集 Γ 成立，若对任意 Γ 中的无穷实数子集 X，或者 $|X|=|\mathbb{N}|$ 成立，或者 $|X|=|\mathbb{R}|$ 成立。因为包含一个完美集的实数子集和 $\mathbb{R}$ 具有相同的大小，**CH** 对具有完美集特征的实数子集成立。康托尔-本迪克森证明了，**CH** 对实数的闭子集成立。事实上，**CH** 对更复杂的实数子集也成立。苏斯林证明了 **CH** 对 Σ_1^1 集成立。[172] 以上结论都是在 **ZFC** 中可证的。在 **ZFC** 中我们不能证明更强的结论，要证明更强的结论我们需要增加新公理。集合论研究表明，假设决

---

[163] Thomas Jech, *Set theory*.

[164] 关于贝尔范畴定理，参见：Thomas Jech, opcit.

[165] 参见：W. Hugh Woodin, “The Continuum Hypothesis Part I”, Notices of the AMS, 48(6): 567-576, 2001。事实上，若 **PFA** 成立，我们也有 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$。

[166] W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part I”.

[167] Ibid.

[168] Ibid.

[169] M. Foreman, M. Magidor & Saharon Shelah,“Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters. I”, *The Annals of Mathematics*, Vol. 127, No. 1, 127 (1): 1-47, 1988.

[170] M. Foreman & A. Kanamori, *Handbook of Set Theory*.

[171] 连续统假设的另一种等价形式是：$2^{\aleph_0}=\aleph_1$。

[172] Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”.

定性公理或大基数公理，**CH** 对更复杂的点集类也成立。例如，克里斯（Alexander S. Kechris）-马丁证明了，若 $Det(\Delta^1_n)$ 成立，则 **CH** 对 Σ^1_{n+1} 集成立；若 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$ 成立，则 **CH** 对 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中的任意实数子集成立。[173] 我们知道，强的大基数公理（如存在一真类武丁基数）蕴涵 $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$。因此，假设强的大基数公理（或决定性公理），**CH** 对实数的所有投影子集和 $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ 中的任意实数子集也成立。更一般地，假设存在一真类武丁基数，则 **CH** 对普遍贝尔集也成立。[174]

若 **CH** 对某一类实数子集不成立，则 **CH** 不成立。**CH** 对某些实数子集成立只是提供了 **CH** 可能成立的一些证据，但不足以证明 **CH** 成立。我们知道，大基数公理对于解决复杂度比 **CH** 低的独立性命题是很有效的，但却不能解决 **CH**。因此可以说，**CH** 是检验哥德尔纲领能否成功的试验石。寻找解决 **CH** 的新公理的故事是更复杂的。

文献中有两种解决 **CH** 的途径：局部方法和全局方法。在局部方法中，我们尝试一层层地理解集宇宙 **V**：先寻找关于二阶算术的新公理，再寻找关于三阶算术的新公理，这样继续下去寻找集宇宙 **V** 每层对应的新公理。在全局方法中，我们不是逐步寻找集宇宙 **V** 每层的新公理，而是尝试理解集宇宙 **V** 的全局结构。武丁是研究连续统假设的国际著名专家，下文主要讨论武丁关于 **CH** 的工作。武丁先后采用了局部方法和全局方法研究 **CH**。有趣地是，在这两种方法中，武丁得到关于 **CH** 的不同答案。[175] 本文重点讨论武丁解决 **CH** 的局部方法和全局方法。

5.1 武丁关于 CH 的局部方法

我们先讨论武丁在 2000 年左右解决 **CH** 的局部方法。[176] 有两种集宇宙 **V** 的分层方式，一种是使用 $\langle \mathbf{V}_\alpha : \alpha \in Ord \rangle$，另一种是使用 $\langle H_\kappa : \kappa \in Card \rangle$。[177] $H(\kappa)$ 分层

---

173 Ibid.

174 Ibid.

175 关于武丁解决 **CH** 的局部方法，参见：（1） W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part I”;（2）W. Hugh Woodin, “The Continuum Hypothesis Part II”, Notices of the AMS, 48(7): 681-690, 2001;（3）W. Hugh Woodin, “The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω -conjecture”, in: *Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics Theorems*, Philosophies, pp. 13-42, 2011。关于武丁解决 **CH** 的全局方法，参见：（1）W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”, *Journal of Mathematical Logic*, 10: 101-339, 2010;（2）W. Hugh Woodin,“Suitable extender models II”, *Journal of Mathematical Logic*, 11(2): 115-436, 2011;（3）W. Hugh Woodin,“In search of ultimate- $\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 23, Number 1, 2017。

176 参见：（1）W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part I”;（2）W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part II”。

177 定义 $H(\kappa)=\{x:|trc(x)|<\kappa\}$，其中，$trc(X)$ 是包含集合 X 的最小传递集，称为是集合 X 的传递闭包(transitive closure)。

比 $\mathbf{V}(\kappa)$ 分层更精细。武丁指出，若 **CH** 不成立，则这两个结构是非常不同的，且 $H(\kappa)$ 层级比 $\mathbf{V}(\kappa)$ 层级本质上是更简单的，这是武丁使用 $H(\kappa)$ 层级而不使用 $\mathbf{V}(\kappa)$ 层级的原因。[178]

在局部方法中，武丁采用渐进的方式分别寻找如下两结构的正确公理：$\langle H(\omega),\in\rangle,\langle H(\omega_1),\in\rangle$ 和 $\langle H(\omega_2),\in\rangle$。[179] 结构 $\langle H(\omega),\in\rangle$ 是逻辑等价于一阶算术的标准模型 $\langle\mathbb{N},+,\times\rangle$。[180] 我们已知："**ZFC** 减去无穷公理"是结构 $\langle H(\omega),\in\rangle$ 的正确公理。武丁认为，**ZFC** 明显是不完全的，且以一种实质的方式是不完全的。结构 $\langle H(\omega_1),\in\rangle$ 是逻辑等价于二阶算术的标准模型 $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mathbb{N},+,\times,\in\rangle$。[181] 武丁指出，20 世纪 90 年代集合论研究的一个重要成果是发现了结构 $\langle H(\omega_1),\in\rangle$ 的正确公理：$\mathbf{ZFC}+\mathbf{PD}$。[182]

20 世纪 80-90 年代的研究发现了很多支持 **PD** 是关于结构 $\langle H(\omega_1),\in\rangle$ 的正确公理的证据。这些证据可概括为：理论的统一性、结论的丰富性、经验的完全性、力迫的绝对性、与大基数公理的关联。第一，若 **PD** 成立，我们可将在 **ZFC** 中可证的关于实数子集的性质以一种最自然和直接的方式推广到实数的所有投影子集；第二，假设 **PD**，我们可证明关于实数的投影子集的丰富优美的结构性质。第三，公理 **PD** 对于解决关于实数的投影子集的独立性命题是很有效的，它解决了所有已知的关于实数的投影子集的独立性命题。相对于 **PA** 之于结构 $\langle H(\omega),\in\rangle$，**PD** 对结构 $\langle H(\omega_1),\in\rangle$ 是经验上完全的：存在在 **PA** 中不可证的关于自然数性质的数学命题，而假设 **PD**，所有已知的关于实数的投影子集的问题都有确定的答案。第四，我们不能使用力迫法证明某一关于结构 $\langle H(\omega_1),\in\rangle$ 的问题是独立于 $\mathbf{ZFC}+\mathbf{PD}$ 的。[183] 第五，武丁指出，**PD** 和大基数公理间的紧密关联提供了公理 **PD** 为真的令人信服的证据。[184] 绝多数集合论学家接受 **PD** 为集合论的新公理。武丁指出，人们经过大量的研究才接受 **PD** 为正确的新公理，这表明数学真理的发现不是纯

---

[178] W. Hugh Woodin，"The Continuum Hypothesis Part I"．
[179] Ibid.
[180] $H(\omega)=\mathbf{V}_\omega$ 且 $H(\omega+1)$ 和 $\mathbf{V}_{\omega+1}$ 的理论是相互可解释的。
[181] W. Hugh Woodin, opcit.
[182] Ibid.
[183] W. Hugh Woodin，"Set theory after Russell", in: *One hundred years of Russell's paradox*, ed. G. Link. New York: de Gruyter, 2004.
[184] Ibid.

粹形式的事业。[185]

基于人们发现**PD**公理的成功经验，武丁相信我们可以一种非多元主义的方式解决连续统假设。[186] 因为**CH**可被表述为关于结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的命题，如果我们找到结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的正确公理，那么**CH**是可判定的。在武丁看来，我们已找到关于结构$\langle H(\omega_1),\in\rangle$的正确公理，下一个自然的目标是找到结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的正确公理。[187] 武丁希望所找到的新公理能使结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的理论具有力迫绝对性，即不能通过力迫法证明关于结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的独立性结果。[188]

武丁曾给出三个相似但不同的论证**CH**不成立的方案，但更成熟的论证是通过Ω-逻辑来说明的。[189] 下面，我们将基于Ω-逻辑介绍武丁论证**CH**不成立的工作。武丁分离出若干良好性质，称具有这些性质的公理为“好”公理。武丁认为，若存在这样的“好”公理，且所有的“好”公理都Ω-蕴涵**CH**不成立，那么这构成**CH**不成立的有力论证。[190]

武丁在专著“The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal”中首先引入Ω-逻辑，其主要想法是定义一种新的有效性概念使得：（1）所有真值不能被力迫方法所改变的真命题根据此概念是有效的；（2）Ω-逻辑的有效性概念是力迫绝对的。[191] 在如下意义上，Ω-逻辑是一种比一阶逻辑更强的逻辑：所有在一阶逻辑中有效的命题在Ω-逻辑中也是有效的，但反之则不成立。

给定可数理论T和语句φ，定义$T\vDash_\Omega\varphi$当且仅当 对任意的偏序集$\mathbb{P}$及任意序数α， 若$V_\alpha^{\mathbb{P}}\vDash T$，则$V_\alpha^{\mathbb{P}}\vDash\varphi$；[192] 我们称语句$\varphi$是$\Omega$-可满足的，若存在偏序集$\mathbb{P}$及序数$\alpha$使得$V_\alpha^{\mathbb{P}}\vDash\varphi$； 称语句$\varphi$是$\Omega$-有效的，若$\varnothing\vDash_\Omega\varphi$。[193] 对应于$\Omega$-逻辑 的语义蕴涵概念$\vDash_\Omega$，我们也有对应的语法证明概念$\vdash_\Omega$。[194]

[185] W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part I”.
[186] W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part II”.
[187] Ibid.
[188] Ibid.
[189] Colin J. Rittberg,“How Woodin changed his mind: new thoughts on the Continuum Hypothesis”, *Arch. Hist. Exact Sci*, 69: 125-151, 2015.
[190] W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part II”.
[191] Colin J. Rittberg, opcit.
[192] $V_\alpha^{\mathbb{P}}$表示V_α在偏序集$\mathbb{P}$下对应的力迫扩充。
[193] 参见：（1）Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”;（2）W. Hugh Woodin, “Suitable extender models I”。
[194] 语法证明的概念较复杂，我们省去技术性细节，参见：（1）Peter Koellner, opcit;（2）W. Hugh Woodin, opcit。

武丁证明了，假设存在一真类武丁基数，Ω-逻辑的语义蕴涵关系“$T \models_{\Omega} \varphi$”和语法证明关系“$T \vdash_{\Omega} \varphi$”都具有力迫绝对性。[195] 这个事实使得$\Omega$-逻辑 在元数学的意义上是很有趣的。定义$\mathbf{V}_{\Omega} = \{\phi : \phi 是 \Omega\text{-有效的}\}$。由武丁的结果，$\mathbf{V}_{\Omega}$是力迫绝对的，即“语句是否$\Omega$-有效”是力迫绝对的。武丁证明了$\Omega$-逻辑是可靠的：给定可数理论$T$和语句$\varphi$，若$T \vdash_{\Omega} \varphi$， 则$T \models_{\Omega} \varphi$。[196] 但$\Omega$-逻辑是否完备还是个未解问题，武丁提出了如下猜想。

Ω-猜想 假设$\mathbf{ZFC}$及存在一真类武丁基数。则对任意的语句$\varphi, \varnothing \vdash_{\Omega} \varphi$当且仅当$\varnothing \models_{\Omega} \varphi$。[197]

对任意语句集Γ，我们称理论T对Γ是Ω-完备的，若对任意的$\varphi \in \Gamma$，或者$T \models_{\Omega} \varphi$或者$T \models_{\Omega} \neg\varphi$。[198] 我们已知，大基数公理不足以解决$\mathbf{CH}$。 在$\Omega$-逻辑的框架下，这一事实可概括为：若$\phi$是某一大基数公理，则$\mathbf{ZFC} + \phi$对$\Sigma_1^2$语句不是$\Omega$-完备的。[199] 武丁证明了：假设$\mathbf{ZFC}$且存在一真类可测武丁基数（measurable woodin cardinals），则$\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH}$对$\Sigma_1^2$语句是$\Omega$-完备的。[200] 事实上，在$\Omega$-等价的意义上，$\mathbf{CH}$是唯一的使得对$\Sigma_1^2$语句是$\Omega$-完备的$\Sigma_1^2$语句。[201] 这表明$\mathbf{CH}$在$\Sigma_1^2$语句中的独特性。

---

195 武丁证明了：假设$\mathbf{ZFC}$及存在一真类武丁基数。假设T是理论，φ是语句，$\mathbb{P}$是偏序集，$G \subseteq \mathbb{P}$是脱殊滤。则：（1） $\mathbf{V} \models$“$T \models_{\Omega} \varphi$”当且仅当$\mathbf{V}[G] \models$“$T \models_{\Omega} \varphi$”；（2）$\mathbf{V} \models$“$T \vdash_{\Omega} \varphi$”当且仅当$\mathbf{V}[G] \models$“$T \vdash_{\Omega} \varphi$”。参见：（1）Peter Koellner,“On the question of absolute undecidability”, in: Kurt Gödel, Solomon Feferman, Charles Parsons, Stephen G. Simpson (eds.), *Philosophia Mathematica*, Association for Symbolic Logic. pp. 153-188, 2010；（2）W. Hugh Woodin, “Suitable extender models I”。

196 (1) Peter Koellner, “On the question of absolute undecidability”; (2) W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”.

197 Ibid.

198 Ibid.

199 (1) Peter Koellner, “On the question of absolute undecidability”; (2) W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”.

200 Ibid.

201 武丁证明了：假设A是Σ_1^2语句,$\mathbf{ZFC} + A$是Ω-可满足的，且$\mathbf{ZFC} + A$对Σ_1^2语句是Ω-完备的，则$\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH} \models_{\Omega} A$且$\mathbf{ZFC} + A \models_{\Omega} \mathbf{CH}$。参见：（1）Peter Koellner, opcit; （2）W. Hugh Woodin, opcit。

对任意的结构M，我们称理论T对M是Ω-完备的，若对任意的语句θ， 或者$T \models_{\Omega}$“$M \models \theta$”，或者$T \models_{\Omega}$“$M \models \neg\theta$”。[202] 假设存在一真类武丁基数，武丁证明了$\mathbf{ZFC}$对结构$\langle H(\omega_1), \in \rangle$是$\Omega$-完备的。特别地，武丁证明了，假设存在一真类武丁基数，对任意的语句ϕ, $\mathbf{ZFC} \models_{\Omega}$“$\langle H(\omega_1), \in \rangle \models \phi$”当且仅当$\langle H(\omega_1), \in \rangle \models \phi$。[203] 一个推论是：$\mathbf{ZFC} \vdash_{\Omega} \mathbf{PD}$， 这表明$\Omega$-逻辑比一阶逻辑更强。

武丁认为，寻找结构$\langle H(\omega_2), \in \rangle$的正确公理可表述为如下问题：是否存在语句$\phi$使得$\mathbf{ZFC}+\phi$是$\Omega$-可满足的，且$\mathbf{ZFC}+\phi$对结构$\langle H(\omega_2), \in \rangle$是$\Omega$-完备的。[204] 我们可称满足以上条件的语句$\phi$为“好”公理。若$\phi$是“好”公理，则我们称$\mathbf{ZFC}+\phi$是结构$\langle H(\omega_2), \in \rangle$的典范理论，即$\mathbf{ZFC}+\phi$在$\Omega$-逻辑中可完全地决定结构$\langle H(\omega_2), \in \rangle$的理论。一个自然的问题是：是否存在这样的“好”？武丁提出$\star$-公理[205]，并证明了：（1）假设存在一真类武丁基数且Ω-猜想成立，则$\star$-公理 是“好”公理；[206]（2）假设存在一真类武丁基数，则$\star$-公理蕴涵$2^{\aleph_0} = \aleph_2$。[207]

武丁的强Ω-猜想（strong Ω-conjecture）称[208]：假设存在一真类武丁基数，则Ω-猜想 成立，且$\mathbf{AD}^+$猜想是Ω-有效的。[209] 武丁证明了：假设存在一真类武丁基数且强Ω-猜想成立，则对任意的“好”公理ϕ，$\mathbf{ZFC}+\phi \models_{\Omega} H(\omega_2) \models \neg\mathbf{CH}$。[210] 对任意的语句$\phi$，定义理论$T_{\phi} = \{\theta : \mathbf{ZFC}+\phi \models_{\Omega}$“$\langle H(\omega_2), \in \rangle \models \theta$”$\}$。[211] 因此，假设存在一真类武丁基数及强$\Omega$-猜想成立，则对任意的“好”公理$\phi, \neg\mathbf{CH} \in T_{\phi}$。因此，$\mathbf{ZFC}$的“好”扩充都$\Omega$-蕴涵$\neg\mathbf{CH}$。武丁的以上结果可概括如下：假设存

[202] 在Ω-逻辑的框架下，$\mathbf{L}(\mathbb{R})$理论的力迫绝对性可重新表述为：假设$\mathbf{ZFC}$及存在一真类武丁基数，则$\mathbf{ZFC}$对结构$\langle \mathbf{L}(\mathbb{R}), \in \rangle$是$\Omega$-完备的。

[203] (1) Peter Koellner, opcit; (2) W. Hugh Woodin, opcit.

[204] Ibid.

[205] W. Hugh Woodin, “The Continuum Hypothesis Part II”.

[206] Peter Koellner, “On the question of absolute undecidability”.

[207] Ibid.

[208] W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”.

[209] 这里我们省略$\mathbf{AD}^+$猜想的技术性内容，参见：W. Hugh Woodin, opcit。

[210] Peter Koellner,“On the question of absolute undecidability”.

[211] Ibid.

在一真类武丁基数及强Ω-猜想成立，则存在语句ϕ使得ϕ是“好”公理，且所有的“好”公理都Ω-蕴涵$\neg\mathbf{CH}$。

一个自然的问题是：“好”公理是否唯一（或者结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的典范理论是否唯一）？答案是否定的。科尔纳-武丁证明了，“好”公理不是唯一的。[212]科尔纳-武丁证明了：假设存在一真类武丁基数，若A是“好”公理，则存在“好”公理B使得$T_A \neq T_B$。[213] 那么在这些“好”公理中，我们应选择接受哪个公理呢？武丁没有明确地回答这个问题，在他看来，$\star$-公理是结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的正确公理。[214] 科尔纳指出，在“好”公理$\phi$所对应的理论$T_\phi$中，$\star$-公理所对应的理论$T_\star$具有某种极大性质。[215] 科尔纳认为我们应接受$\star$-公理。[216] 科尔纳的想法与哥德尔关于新公理选择的极大性原则是相吻合的，但科尔纳没有解释我们为何应接受具有这种极大性质的$\star$-公理为更好的公理。[217]

武丁在解决$\mathbf{CH}$的局部方法中提出$\star$-公理，并证明了，假设存在一真类武丁基数及强Ω-猜想成立，则$\mathbf{ZFC}+\star$-公理是结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的典范理论，$\star$-公理蕴涵$2^{\aleph_0}=\aleph_2$，且结构$\langle H(\omega_2),\in\rangle$的所有典范理论都$\Omega$-蕴涵$\neg\mathbf{CH}$。问题的关键是强$\Omega$-猜想是否成立。假设存在一真类武丁基数，武丁证明了，强Ω-猜想和Ω-猜想都是力迫绝对的。[218] 这表明强Ω-猜想（或Ω-猜想）有可能被否证，为证明这点，我们仅需构造一个$\mathbf{V}$的力迫扩充使得在其中强Ω-猜想（或Ω-猜想）不成立。

集宇宙多元论认为，不存在唯一合理的集宇宙，而是有多个合理的集宇宙；其中一些集宇宙可能因某些原因比其他集宇宙更优越些，但它们中的任何一个都不能被认为是唯一合理的集宇宙。不同的集宇宙多元论的区别在于接受哪些集宇宙为合理的集宇宙。其中一种观点认为，$\mathbf{ZFC}$的所有内模型都是合理的集宇宙。[219] 这种观点被称为宽泛的集宇宙多元论；在这种观点下，一个集合论命题为真当且仅当其在$\mathbf{ZFC}$中可证。

下面我们引入文献中集合论反实在主义的一种经典观点：集宇宙力迫多元论（the

---

[212] Peter Koellner & W. H. Woodin, Incompatible Ω-complete theories, *The Journal of Symbolic Logic*, 74(4), 2009.

[213] Ibid.

[214] W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part II”.

[215] (1) Peter Koellner, “On the question of absolute undecidability”; (2) Peter Koellner,“The Continuum Hypothesis”.

[216] Ibid.

[217] Ibid.

[218] 即对任意的偏序集$\mathbb{P}$及其脱殊滤G，$\mathbf{V}\vDash$强Ω-猜想当且仅当$\mathbf{V}[G]\vDash$强Ω-猜想。同样的结论对Ω-猜想也成立。参见：Peter Koellner, “On the question of absolute undecidability”。

[219] Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”.

generic multiverse of sets）。假设M是$\mathbf{ZFC}$的传递模型，令$\mathbf{V}_M$是具有如下性质的由传递模型组成的最小类：$M \in \mathbf{V}_M$且对任意的传递模型M_1和M_2使得$M_1 \vDash \mathbf{ZFC}$且M_2是M_1的力迫扩充，若$M_1 \in \mathbf{V}_M$或者$M_2 \in \mathbf{V}_M$，则$M_1 \in \mathbf{V}_M$且$M_2 \in \mathbf{V}_M$。称$\mathbf{V}_M$是由M所生成的力迫集宇宙类（generic multiverse）。[220] 我们称一集合论命题在集宇宙力迫多元论下为真，若它在由$\mathbf{V}$生成的力迫集宇宙类中的每一个集宇宙中都为真；称一命题在集宇宙力迫多元论下为假，若它在由$\mathbf{V}$生成的力迫集宇宙类中的每一个集宇宙中都为假；称一命题在集宇宙力迫多元论下是真值未定的，若它既不是真的也不是假的。[221] 根据集宇宙力迫多元论，$\mathbf{PD}$及$\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$都是真命题，而$\mathbf{CH}$是真值未定的：既不为真也不为假。基于科恩的力迫法，集宇宙力迫多元论是种较流行的观点。认为哥德尔-科恩的独立性结果表明$\mathbf{CH}$没有答案的观点实际上是隐式假设了集宇宙力迫多元论。[222] 如下定理揭示了集宇宙力迫多元论的真概念与Ω-逻辑间的关联。

定理 5 [武丁] 假设$\mathbf{ZFC}$和存在一真类武丁基数。对任意的Π_2-语句ϕ，在集宇宙力迫多元论下，ϕ是真命题当且仅当ϕ是Ω-有效的。[223]

若Ω-猜想成立，其对集合论的基础具有重要的元数学意义。定义$\mathbf{V}_\Omega(H(\kappa^+)) = \{\phi : \mathbf{ZFC} \vDash_\Omega H(\kappa^+) \vDash \phi\}$。[224] 武丁证明了，假设存在一真类武丁基数且Ω-猜想成立，则理论$\mathbf{V}_\Omega$是递归于理论$\mathbf{V}_\Omega(H(c^+))$，且$\mathbf{V}_\Omega$在$H(\delta_0^+)$中可定义，其中$c = |\mathbb{R}|$且$\delta_0$是最小的武丁基数。[225] 由这一结论，武丁认为，若我们可通过力迫法证明某命题是独立于“$\mathbf{ZFC}+$大基数公理”的，这并非证明了此命题没有答案。[226] 进一步，武丁证明了，假设存在一真类武丁基数，且Ω-猜想 和$\mathbf{AD}^+$猜想成立，则$\mathbf{V}_\Omega$是在结构$H(c^+)$中可定义的。[227] 武丁认为，尽管人们用力迫法证

220 (1) Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”; (2) W. Hugh Woodin,“The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture”.
221 Ibid.
222 Ibid.
223 Ibid.
224 Ibid.
225 (1) Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”; (2) W. Hugh Woodin,“The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture”.
226 W. Hugh Woodin,“The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture”.
227 (1) Peter Koellner, opcit; (2) W. Hugh Woodin, opcit.

明了**CH**是独立于**ZFC**的，这一事实并非证明了**CH**没有答案。[228]

因Ω-猜想的力迫绝对性，在集宇宙力迫多元论下，Ω-猜想或者为真或者为假。我们知道，若存在一真类武丁基数且Ω-猜想成立，则$\mathbf{V}_\Omega$在$H(\delta_0^+)$中可定义。基于Ω-逻辑 和Ω-猜想，武丁认为集宇宙力迫多元论是不合理的。[229] 武丁指出，假设Ω-猜想成立且存在一真类武丁基数，集宇宙力迫多元论只是一种形式主义的观点，其通过将集宇宙的真归约到集宇宙的一个简单片段（最小的武丁基数的所有子集）而否定层级的超限扩充（transfinite extension）。[230] 武丁认为，基于集合的迭代观念，集宇宙整体层级的真是不能归结为集宇宙的某一个片段的真。[231] 在武丁看来，在集宇宙力迫多元论下为真的Π_2语句集，在它可被集模型所刻画的意义上，是过于简单了。[232] 因此，武丁认为，若Ω-猜想成立，则“一个Π_2语句为真当且仅当其在集宇宙力迫多元论下为真”这种观点是不合理的。

5.2 武丁关于**CH**的全局方法

基于研究上的新突破，武丁在 2010 年采用一种新的全局方法研究**CH**。下面，我们讨论武丁解决**CH**的全局方法，这种方法是与内模型论研究紧密相联的。[233]

ZFC有两个经典内模型：可构成集**L**和层级序数可定义集（hereditarily ordinal definable sets）**HOD**。[234] 这两种内模型各有其优点和缺点。内模型**L**的优点在于它具有精细优美的内部结构，几乎集合论中的所有问题都可在**L**中找到答案（特别地，**CH**在**L**中成立）。然而，**L**的缺点在于它仅容纳弱的大基数，而不能容纳强的大基数。而内模型**HOD**几乎恰与**L**相反：**HOD**几乎可容纳所有已知的大基数，但它的内部结构是尚不清楚的。内模型论研究始于哥德尔的可构成集**L**，其目标是构造同时具有**L**和**HOD**的优点的内模型，即既具有类似**L**的良好结构性质又可容纳足够强的大基数的内模型。若容纳的大基数越强，则对应的内模型构造问题就越有趣和困难。

内模型论研究在过去是极其成功的。库能 构造了类似**L**的可容纳可测基数的内模型。米切尔（William Mitchell）构造了类似**L**的可容纳强基数（strong cardinal）[235]的内模型。[236] 迭代假设是内模型论中的一个技术性概念。[237]假设迭代假设

[228] W. Hugh Woodin, opcit.
[229] Ibid.
[230] Ibid.
[231] Ibid.
[232] Ibid.
[233] 关于内模型论的介绍，参见：（1） W. Mitchell, “Beginning inner model theory”, in: *Handbook of Set Theory* (Foreman-Kanamori edited), Springer, 2010；（2）J. R. Steel, “An outline of inner model theory”, in: *Handbook of Set Theory* (Foreman-Kanamori edited), Springer, 2010。
[234] 我们称一个集合是层级序数可定义的（hereditarily ordinal definable），若它是序数可定义的（ordinal definable），并且它的传递闭包的所有元素都是序数可定义的。我们用**HOD**表示所有层级序数可定义的集合组成的类。
[235] 我们称κ是强基数，若对任意的序数λ，存在从$\mathbf{V}$到某一内模型M的初等嵌入$j:\mathbf{V}\to M$使得

（iteration hypothesis）成立，米切尔-斯蒂尔 构造了类似$\mathbf{L}$的容纳超强基数（Superstrong cardinal）[238]的内模型。[239]。但米切尔-斯蒂尔模型的构造是基于迭代假设，对于较弱的大基数，我们已知迭代假设成立；但对于更强的大基数，迭代假设是否成立尚是个未解问题。[240] 当前最好的结果是由尼曼（Itay Neeman）得到的，他解决了证明如下结论所需的迭代假设：若存在武丁基数的武丁极限，则存在一个米切尔-斯蒂尔内模型使得在其中存在武丁基数的武丁极限（Woodin limit of Woodin cardinals）。[241] 武丁基于迭代假设将内模型论研究扩展到有限层的超紧基数。[242] 构造可容纳超紧基数的内模型是内模型论研究的一个重要未解问题。当前内模型论研究尚未构造出容纳超紧基数的内模型。

内模型论研究的旧方法是逐步构造类似$\mathbf{L}$的具有良好结构性质的内模型，其可容纳某种很强的大基数，但不能容纳更强的大基数。武丁发现，内模型论研究的这种旧方法是无法达到超紧基数这一层级的，原因是内模型论研究的旧方法使用的是扩充模型（extender model）。[243] 但武丁证明了，不存在可容纳超紧基数的米切尔-斯蒂尔式扩充模型。[244]武丁认为，这并非意味着不存在容纳超紧基数的内模型，它仅表明内模型论研究的旧方法所构造的内模型不足以容纳超紧基数。武丁改变了这一旧方法并提出一种新方法：策略扩充模型（strategic extender model）。[245]

武丁研究容纳很强的大基数的内模型的初始动机是解决Ω-猜想。武丁认为，我们可合理地预测Ω-猜想有确定的答案，且若答案是它不成立，则某种大基数可证明Ω-猜想不成立；但这种大基数一定是足够强的，当前内模型论研究尚未构造出容纳这种大基数的内模型，因此，这种大基数可称为内模型论研究的一个分界点。[246] 若Ω-猜想成立，那么这种分界点不存在。是否存在这种分界点是武丁研究的动机。有一些证据表明没有这种分界点且Ω-猜想成立，在收集这些证据的过程中，武丁发现：若存在容纳一个超紧基数的策略扩充 模型，则与内模型论研究过去构造的内模型相反，这个内模型可容纳所有已知的大基数。[247] 这是一个令人惊讶的发现，若我们可找到这种模型，这将提供一种有力的证据表明Ω-猜想是成立的。武丁称，这个重要发现改变了内模型论的发展方向：从渐进性地

$Crt(j)=\kappa$ 且 $\mathbf{V}_\lambda \subseteq M$ 。参见：Akihiro Kanamori, “The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings”。

236 W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”;“Suitable extender models II”.

237 Ibid.

238 我们称κ是超强基数若存在传递类M和非平凡的初等嵌入$j:\mathbf{V}\to M$使得$Crt(j)=\kappa$且$\mathbf{V}_{j(\kappa)}\subseteq M$。若$\kappa$是超强基数，则$\kappa$是武丁基数且在$\kappa$下有任意大的武丁基数。 参见：Akihiro Kanamori, “The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings”.

239 W. Hugh Woodin, opcit.

240 Ibid.

241 Ibid.

242 Ibid. 我们称κ是超紧基数，若对任意的$\gamma\geq\kappa$，存在传递类M和非平凡的初等嵌入$j:\mathbf{V}\to M$使得$Crt(j)=\kappa$且$M^\gamma\subseteq M$ （即 M 对γ-序列封闭）。

243 W. Hugh Woodin, opcit.

244 Ibid.

245 W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”;“Suitable extender models II”.

246 Ibid.

247 Ibid.

构造容纳更强大基数的内模型到理解集域 $\mathbf{V}$ 自身，并导致他提出终极 $\mathbf{L}$（Ultimate-$\mathbf{L}$）的概念。[248]

终极 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}$ 一样具有良好的结构性质，终极 $\mathbf{L}$ 具有 $\mathbf{L}$ 的优点而不具有 $\mathbf{L}$ 的缺点，终极 $\mathbf{L}$ 可有效地解决独立性问题，但可容纳所有已知的大基数且和 $\mathbf{V}$ 很接近。武丁认为内模型论研究的旧方法是渐进性的，因此根据其本性是不能达到终极 $\mathbf{L}$ 的。[249] 武丁指出，若我们可构造出容纳一个超紧基数的内模型，这将产生 $\mathbf{L}$ 的终极版本：终极 $\mathbf{L}$；武丁认为，当前内模型论研究必须根本性地改变方法以解决此问题。[250]

武丁指出，若存在和所有已知的大基数公理都兼容且和集域 $\mathbf{V}$ 相近的终极 $\mathbf{L}$，那么存在这样一个可能为真的公理，其断定 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$($\mathbf{V} = Ultimate - \mathbf{L}$)。[251] 武丁先后提出了公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 的不同版本。在“In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”中，武丁比较了这些不同的版本，本文中，公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 默认是指武丁使用的此公理的最强版本。[252]

定理 6 [武丁] 假设 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$，则如下命题成立：
（1）$\mathbf{CH}$ 成立。
（2）Ω-猜想成立。
（3）$\mathbf{V} = \mathbf{HOD}$。
（4）$\mathbf{V}$ 不是任何内模型的力迫扩充：即在集宇宙力迫多元论下，$\mathbf{V}$ 是最小的集宇宙。

武丁指出，假设强的大基数假设，公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 将本质上解决所有的独立性问题。[253] 武丁认为，因为公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 蕴涵 $\mathbf{V}$ 不是任何内模型的力迫扩充，公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 将使得力迫法作为一种证明独立性结论的有效方法变得完全无用。[254] 武丁指出，假设强的大基数公理，公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 将本质上解决所有通过力迫法证明的独立性问题。一个自然的问题是：公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 是否和大基数公理相兼容？为此，武丁提出终极 $\mathbf{L}$ 猜想（Ultimate-$\mathbf{L}$ conjecture）。[255] 武丁认为，若终极 $\mathbf{L}$ 猜想成立，则公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 是与所有已知的大基数相兼容，且我们可构造类似 $\mathbf{L}$ 的可容纳所有已知的大基数的内模型，从而实现内模型论研究的目标。[256]

---

[248] W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”;“Suitable extender models II”.
[249] Ibid.
[250] Ibid.
[251] Ibid.
[252] 关于公理 $\mathbf{V}$ =终极 $\mathbf{L}$ 的定义，参见：W. Hugh Woodin,“In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”。
[253] W. Hugh Woodin,“Suitable extender models I”;“Suitable extender models II”;“In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”。
[254] Ibid.
[255] 关于终极 $\mathbf{L}$ 猜想的具体内容，参见“In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”中的猜想 7.41。
[256] W. Hugh Woodin,“In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”.

若我们称具有公理 **V** =终极 **L** 的良好性质的理论为“好”理论，则在全局方法中，我们同样可找到“好”的理论使得任何的“好”理论都蕴涵 **CH** 成立。然而，这个“存在‘好’理论且所有的‘好’理论都蕴涵 **CH** 成立”的论证策略不足以证明 **CH** 为真。这个论证策略的问题在于：一方面，在武丁的局部方法中，基于同样的论证策略，我们可论证 **CH** 不为真；另一方面，我们需给出有力的论证说明为何具有这些良好性质的理论是“好”理论，及为何选择这些性质而不是其他性质作为判断是否“好”理论的参考标准。

根据武丁的全局方法，**CH** 成立，但根据其局部方法，**CH** 不成立。武丁指出，这并没有导致矛盾，论证 **CH** 不成立的局部方法是基于如下事实：存在结构 $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ 的具有某种极大特征的典范理论，且结构 $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ 的所有典范理论都 Ω-蕴涵 $\neg$**CH**；但这种方法不能扩充到结构 $H(c^+)$。[257] 武丁认为，从结构 $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ 的角度看，局部方法是有说服力的，但从集宇宙 **V** 的整体角度看，局部方法则不是那么有说服力，至少不比基于公理 **V** =终极 **L** 的全局方法更有说服力。[258]

六、结语

基于集合论的反实在主义，**CH** 没有确定的真值。至今为止，也没有一种方案以真正实在主义的方式已解决 **CH**。我们尚未找到得到有力辩护的可解决 **CH** 的集合论新公理。然而，我们已发现可解决 **CH** 的很有前景的候选公理：公理 **V** =终极 **L**。不论是观念上还是技术上，我们尚需提供足够多的数学证据来论证公理 **V** =终极 **L** 是得到有力辩护的。

本人认为，一个公理具有更强的竞争力被接受为集合论的新公理，若它具有如下特征：可解决包括 **CH** 在内的所有已知的独立性命题；提供关于集宇宙 **V** 的连贯、优美的结构理论；具有丰富可验证的结论；在不同的领域中建立统一性；将力迫法的影响降低至最小；与所有已知的大基数公理相兼容。本文第 4 节所讨论的四类公理中没有一种公理同时具有这些特征。本人认为，我们是否有足够的理由接受公理 **V** =终极 **L** 作为集合论的新公理取决于终极 **L** 猜想是否成立，及我们能否提供足够的数学证据表明公理 **V** =终极 **L** 满足如上这些特征，而这取决于关于终极 **L** 的数学研究进展。

进阶读物：

[1] Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, 1990.

---

[257] W. Hugh Woodin,“The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture”.
[258] Ibid.

[2] S. Feferman, H. M. Friedman, P. Maddy, J. R. Steel, “Does mathematics need new axioms”? *Bulletin of Symbolic Logic*, 6(04), 401-446, 2000.

[3] Juliet Floyd & Akihiro Kanamori, “How Gödel Transformed Set Theory”, *Notices of the AMS*, Volume 53, Number 4, 419-427, 2006.

[4] K. Gödel, “What is Cantor's Continuum Problem”? *American Mathematical Monthly* 54, 515-525, 1947.

[5] Michael Heller & W. Hugh Woodin (eds.), *Infinity: New Research Frontiers*. Cambridge University Press, 2011.

[6] David Hilbert, “On the infinite”, in: *Philosophy of Mathematics Selected Readings*, Edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam, Cambridge University Press, pp. 183-201, 2012.

[7] Akihiro Kanamori, “The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 2, Number 1, 1996.

[8] Peter Koellner, “On the question of absolute undecidability”, in: Kurt Gödel, Solomon Feferman, Charles Parsons, Stephen G. Simpson (eds.), *Philosophia Mathematica*. Association for Symbolic Logic. pp. 153-188, 2010.

[9] Peter Koellner, “Independence and large cardinals”, in: *The stanford encyclopedia of philosophy*, ed. Edward N. Zalta. 2011.

[10] Peter Koellner, “The Continuum Hypothesis”, in: *The stanford encyclopedia of philosophy*, ed. Edward N. Zalta.

[11] Peter Koellner, “Large cardinals and determinacy”*, in: The stanford encyclopedia of philosophy*, ed. Edward N. Zalta. http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/large-cardinals-determinacy/2014.

[12] Penelope Maddy, *Naturalism in mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1997.

[13] Penelope Maddy, *Defending the axioms: On the philosophical foundations of set theory*, Oxford University Press, 2011.

[14] J. R. Steel, “Gödel's Program”, in: *Interpreting Gödel: Critical Essays*, J. Kennedy edited, pp. 153-179. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[15] W. Hugh Woodin, “The Continuum Hypothesis Part I”, *Notices of the AMS* 48(6):

567-576, 2001.

[16] W. Hugh Woodin,“The Continuum Hypothesis Part II”, *Notices of the AMS* 48(7): 681-690, 2001.

[17] W. Hugh Woodin, “Suitable extender models I”, *Journal of Mathematical Logic* 10: 101-339, 2010.

[18] W. Hugh Woodin, “Suitable extender models II”, *Journal of Mathematical Logic* 11(2): 115-436, 2011.

[19] W. Hugh Woodin, “The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω-conjecture”, in: *Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics Theorems*, Philosophies, pp. 13-42, 2011.

[20] W. Hugh Woodin, “In search of ultimate-$\mathbf{L}$: the 19th midrasha mathematicae lectures”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 23, Number 1, 2017.