现代逻辑与三次数学危机

程勇　　武汉大学哲学学院

一位名人的一句名言

逻辑，源自古典希腊语(logos)，最初的意思是“词语”或“言语”，(引申出意思“思维”或“推理”)，1902年严复译《穆勒名学》，将其意译为“名学”，音译为“逻辑”。

读书使人充实，讨论使人机智，笔记使人准确，读史使人明智，读诗使人灵秀，数学使人周密，科学使人深刻，伦理使人庄重，逻辑修辞使人善辩。凡有所学，皆成性格。—培根

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学
- 物理

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学
- 物理
- 化学

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学
- 物理
- 化学
- 天文

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学
- 物理
- 化学
- 天文
- 地理

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学
- 物理
- 化学
- 天文
- 地理
- 生命科学

当代七大基础学科之一：现代逻辑

联合国教科文组织明确规定的当代七大基础学科：

- 数学
- 物理
- 化学
- 天文
- 地理
- 生命科学
- 现代逻辑

传统逻辑

传统逻辑

- 逻辑学起源于哲学，随着科学的进步和发展从哲学中分化出来，发展成为一门独立成熟的科学

传统逻辑

- 逻辑学起源于哲学，随着科学的进步和发展从哲学中分化出来，发展成为一门独立成熟的科学
- 传统逻辑以概念、判断、推理为思维的基本形式，研究这些基本形式的内涵、方法、规律以及违反思维规则而导致的逻辑错误

传统逻辑

- 逻辑学起源于哲学，随着科学的进步和发展从哲学中分化出来，发展成为一门独立成熟的科学
- 传统逻辑以概念、判断、推理为思维的基本形式，研究这些基本形式的内涵、方法、规律以及违反思维规则而导致的逻辑错误
- 传统逻辑创始人是古希腊哲学家亚里士多德。他系统讨论了什么是正确的自然语言推理，建立了第一个逻辑系统，即三段论理论。其论述逻辑的代表作有《形而上学》和《工具论》

传统逻辑

- 逻辑学起源于哲学，随着科学的进步和发展从哲学中分化出来，发展成为一门独立成熟的科学
- 传统逻辑以概念、判断、推理为思维的基本形式，研究这些基本形式的内涵、方法、规律以及违反思维规则而导致的逻辑错误
- 传统逻辑创始人是古希腊哲学家亚里士多德。他系统讨论了什么是正确的自然语言推理，建立了第一个逻辑系统，即三段论理论。其论述逻辑的代表作有《形而上学》和《工具论》
- 传统逻辑只构成现代逻辑一个很小的部分，尽管在人类文明史上有不可磨灭的贡献，但随着科学发展，它提供的逻辑观念、理论和工具，相对于科学（尤其数学）研究的需要来说显得越发贫乏

亚里士多德

亚里士多德

- 亚里士多德(Aristotle,公元前384-322)，古希腊人，伟大哲学家和逻辑学家，传统逻辑创始人和集大成者，柏拉图的学生、亚历山大的老师。马克思曾称亚里士多德是古希腊哲学家中最博学的人物，恩格斯称他是“古代的黑格尔”。

亚里士多德

- 亚里士多德(Aristotle,公元前384-322)，古希腊人，伟大哲学家和逻辑学家，传统逻辑创始人和集大成者，柏拉图的学生、亚历山大的老师。马克思曾称亚里士多德是古希腊哲学家中最博学的人物，恩格斯称他是“古代的黑格尔”。
- 百科全书式的科学家，几乎对每个学科都做出了贡献。写作涉及伦理学、形而上学、心理学、经济学、神学、政治学、修辞学、自然科学、教育学、诗歌、风俗，以及雅典法律。

亚里士多德

- 亚里士多德(Aristotle,公元前384-322)，古希腊人，伟大哲学家和逻辑学家，传统逻辑创始人和集大成者，柏拉图的学生、亚历山大的老师。马克思曾称亚里士多德是古希腊哲学家中最博学的人物，恩格斯称他是“古代的黑格尔”。
- 百科全书式的科学家，几乎对每个学科都做出了贡献。写作涉及伦理学、形而上学、心理学、经济学、神学、政治学、修辞学、自然科学、教育学、诗歌、风俗，以及雅典法律。
- 逻辑学代表作：《范畴篇》、《解释篇》、《前分析篇》、《后分析篇》、《论题篇》、《辩谬篇》，以上六篇逻辑学著作总称《工具论》。

莱布尼茨之梦

莱布尼茨之梦

- 莱布尼茨(Leibniz, 1646-1716)，德国哲学家、数学家，历史上少见的通才。在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作，被誉为十七世纪的亚里士多德

莱布尼茨之梦

- 莱布尼茨(Leibniz, 1646-1716)，德国哲学家、数学家，历史上少见的通才。在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作，被誉为十七世纪的亚里士多德
- 在数学领域，他和牛顿先后独立发明了微积分，而且他创立的微积分中采用的数学符号被更广泛的使用

莱布尼茨之梦

- 莱布尼茨(Leibniz, 1646-1716)，德国哲学家、数学家，历史上少见的通才。在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作，被誉为十七世纪的亚里士多德
- 在数学领域，他和牛顿先后独立发明了微积分，而且他创立的微积分中采用的数学符号被更广泛的使用
- 在逻辑领域，首先提出“普遍的符号语言”、“推理演算”和“思维机械化”等思想：创造一种普遍的形式语言，把人类的推理还原为计算，并且制造执行这些运算的推理机

莱布尼茨之梦

- 莱布尼茨(Leibniz, 1646-1716)，德国哲学家、数学家，历史上少见的通才。在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作，被誉为十七世纪的亚里士多德
- 在数学领域，他和牛顿先后独立发明了微积分，而且他创立的微积分中采用的数学符号被更广泛的使用
- 在逻辑领域，首先提出“普遍的符号语言”、“推理演算”和“思维机械化”等思想：创造一种普遍的形式语言，把人类的推理还原为计算，并且制造执行这些运算的推理机
- “精炼我们的推理的唯一方式是使它们同数学一样切实，这样我们能一眼就找出我们的错误，并且在人们有争议的时候，我们可以简单的说：让我们计算，而无须进一步的忙乱，就能看出谁是正确的”。(发现的艺术, 1685）

弗雷格

弗雷格

- 弗雷格(Gottlob Frege, 1848-1925)，德国数学家、逻辑学家和哲学家，数理逻辑和分析哲学的奠基人。

弗雷格

- 弗雷格(Gottlob Frege, 1848-1925)，德国数学家、逻辑学家和哲学家，数理逻辑和分析哲学的奠基人。
- 1879年发表的《概念演算：一种按算术语言构成的思维符号语言》是亚里士多德之后逻辑学领域最重要的出版物，此书建立了第一个谓词逻辑系统，是现代逻辑诞生的标志。谓词逻辑用形式化方法研究并精确刻画数学中常使用的关于量词的推理规则；并用数学方法研究谓词逻辑系统的性质和表达能力。逻辑学逐步发展成为一门独立成熟的科学。

弗雷格

- 弗雷格(Gottlob Frege, 1848-1925)，德国数学家、逻辑学家和哲学家，数理逻辑和分析哲学的奠基人。
- 1879年发表的《概念演算：一种按算术语言构成的思维符号语言》是亚里士多德之后逻辑学领域最重要的出版物，此书建立了第一个谓词逻辑系统，是现代逻辑诞生的标志。谓词逻辑用形式化方法研究并精确刻画数学中常使用的关于量词的推理规则；并用数学方法研究谓词逻辑系统的性质和表达能力。逻辑学逐步发展成为一门独立成熟的科学。
- 弗雷格试图找出算术的逻辑基础，以演绎的方式证明“二加二等于四”这类基本等式必然为真。

弗雷格

- 弗雷格(Gottlob Frege, 1848-1925)，德国数学家、逻辑学家和哲学家，数理逻辑和分析哲学的奠基人。
- 1879年发表的《概念演算：一种按算术语言构成的思维符号语言》是亚里士多德之后逻辑学领域最重要的出版物，此书建立了第一个谓词逻辑系统，是现代逻辑诞生的标志。谓词逻辑用形式化方法研究并精确刻画数学中常使用的关于量词的推理规则；并用数学方法研究谓词逻辑系统的性质和表达能力。逻辑学逐步发展成为一门独立成熟的科学。
- 弗雷格试图找出算术的逻辑基础，以演绎的方式证明“二加二等于四”这类基本等式必然为真。
- 以弗雷格建立第一个谓词逻辑系统为分水岭，19世纪中叶以前的逻辑学统称为传统逻辑，19世纪中叶以后发展起来的符号逻辑统称为现代逻辑。

哥德尔

哥德尔

- 哥德尔(Kurt Gödel, 1906-1978), 20世纪最伟大的逻辑学家和数学家，其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理。当代最有影响力的智慧巨人之一，美国《时代》杂志曾评选出20世纪100个最伟大的人物，在数学家中，排在第一的是哥德尔。

哥德尔

- 哥德尔(Kurt Gödel, 1906-1978), 20世纪最伟大的逻辑学家和数学家，其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理。当代最有影响力的智慧巨人之一，美国《时代》杂志曾评选出20世纪100个最伟大的人物，在数学家中，排在第一的是哥德尔。

- 爱因斯坦勋章获奖评价："20世纪最有意义的数学真理的发现者"，"哥德尔在现代逻辑中的成就是非凡的、不朽的，他的不朽甚至超过了纪念碑，他是一个里程碑，是永存的纪念碑。"

哥德尔

- 哥德尔(Kurt Gödel, 1906-1978), 20世纪最伟大的逻辑学家和数学家，其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理。当代最有影响力的智慧巨人之一，美国《时代》杂志曾评选出20世纪100个最伟大的人物，在数学家中，排在第一的是哥德尔。
- 爱因斯坦勋章获奖评价："20世纪最有意义的数学真理的发现者"，"哥德尔在现代逻辑中的成就是非凡的、不朽的，他的不朽甚至超过了纪念碑，他是一个里程碑，是永存的纪念碑。"
- 在逻辑学中的地位，一般都将他与亚里士多德和莱布尼兹相比；在数学中的地位，爱因斯坦把哥德尔的贡献与他本人对物理学的贡献相提并论。

哥德尔生平：生的伟大，死的渺小

- 1906年生于捷克，1924年年在维也纳大学攻读物理，1926年转到数学系，并参加哲学小组活动
- 1930年获博士学位，博士论文证明了谓词逻辑的完备性：所有逻辑有效的公式都是可证的
- 1938年到美国普林斯顿高等研究院任职，1948年加入美国籍，1953年成为该所教授
- 1931年发表的论文《〈数学原理〉及有关系统中的形式不可判定命题》证明了不完全性定理
- 1933年证明连续统假设对集合论公理系统的相对一致性
- 1978年卒于美国普林斯顿，科学的病因解释：死于人格紊乱造成的营养不良和食物不足

逻辑学与哲学

逻辑学与哲学

- 哲学：反思与追问(Thinking about thinking)

逻辑学与哲学

- 哲学：反思与追问(Thinking about thinking)
- 对如下主题的系统、理性、批判性的思考：
  1. 存在 (形而上学)
  2. 知识(知识论)
  3. 价值 (伦理学)
  4. 心灵(心灵哲学)
  5. 语言(语言哲学)
  6. 科学(科学哲学)
  7. 理性与信仰 (宗教哲学)

- 理论计算机科学：how we can compute （计算的模型），What we can and can't compute （计算的限度），and how fast we can compute （计算的复杂性）.

逻辑学与计算机科学

- 理论计算机科学：how we can compute （计算的模型），What we can and can't compute （计算的限度），and how fast we can compute （计算的复杂性）.
- 计算概念的严格定义和物理计算机的理论模型均来源于现代逻辑

逻辑学与计算机科学

- 理论计算机科学：how we can compute （计算的模型），What we can and can't compute （计算的限度），and how fast we can compute （计算的复杂性）.
- 计算概念的严格定义和物理计算机的理论模型均来源于现代逻辑
- 逻辑之于计算机科学相当于微积分之于物理学

逻辑学与计算机科学

- 理论计算机科学：how we can compute （计算的模型），What we can and can't compute （计算的限度），and how fast we can compute （计算的复杂性）.
- 计算概念的严格定义和物理计算机的理论模型均来源于现代逻辑
- 逻辑之于计算机科学相当于微积分之于物理学
- 计算机科学是逻辑应用最主要的领域，也是逻辑发展的重要推动力量之一

逻辑学与数学：数理逻辑的基本问题

- 数学：The science of abstract mathematical structure

- 数学：The science of abstract mathematical structure
- 经典逻辑：The science of abstract structure of mathematical reasoning

对数学推理的逻辑规则及数学基础问题的研究推动了数理逻辑四领域的发展（证明论、集合论、模型论、递归论）

逻辑学与数学：数理逻辑的基本问题

- 数学：The science of abstract mathematical structure
- 经典逻辑：The science of abstract structure of mathematical reasoning

对数学推理的逻辑规则及数学基础问题的研究推动了数理逻辑四领域的发展（证明论、集合论、模型论、递归论）

- 证明论　　证明的结构，证明的限度，一致性证明，真的形式刻画，真与可证的关系

- 数学：The science of abstract mathematical structure
- 经典逻辑：The science of abstract structure of mathematical reasoning

对数学推理的逻辑规则及数学基础问题的研究推动了数理逻辑四领域的发展（证明论、集合论、模型论、递归论）

- 证明论　　证明的结构，证明的限度，一致性证明，真的形式刻画，真与可证的关系
- 集合论　　无穷的本质与性质，独立性问题

逻辑学与数学：数理逻辑的基本问题

- 数学：The science of abstract mathematical structure
- 经典逻辑：The science of abstract structure of mathematical reasoning

对数学推理的逻辑规则及数学基础问题的研究推动了数理逻辑四领域的发展（证明论、集合论、模型论、递归论）

- 证明论　　证明的结构，证明的限度，一致性证明，真的形式刻画，真与可证的关系
- 集合论　　无穷的本质与性质，独立性问题
- 模型论　　形式语言与其结构模型间的关系

逻辑学与数学：数理逻辑的基本问题

- 数学：The science of abstract mathematical structure
- 经典逻辑：The science of abstract structure of mathematical reasoning

对数学推理的逻辑规则及数学基础问题的研究推动了数理逻辑四领域的发展（证明论、集合论、模型论、递归论）

- 证明论　　证明的结构，证明的限度，一致性证明，真的形式刻画，真与可证的关系
- 集合论　　无穷的本质与性质，独立性问题
- 模型论　　形式语言与其结构模型间的关系
- 递归论　　计算的模型，计算的限度，计算复杂性

- 数学：The science of abstract mathematical structure
- 经典逻辑：The science of abstract structure of mathematical reasoning

对数学推理的逻辑规则及数学基础问题的研究推动了数理逻辑四领域的发展（证明论、集合论、模型论、递归论）

- 证明论　证明的结构，证明的限度，一致性证明，真的形式刻画，真与可证的关系
- 集合论　无穷的本质与性质，独立性问题
- 模型论　形式语言与其结构模型间的关系
- 递归论　计算的模型，计算的限度，计算复杂性
- 数学基础的哲学问题　三大哲学学派：逻辑主义，形式主义，直觉主义

现代逻辑体系结构

现代逻辑体系结构

- 经典逻辑：命题逻辑（propositional logic），一阶逻辑（first-order logic）

现代逻辑体系结构

- 经典逻辑：命题逻辑（propositional logic），一阶逻辑（first-order logic）
- 数理逻辑（基于经典逻辑对数学基础的研究）：集合论（Set Theory），模型论（Model Theory），证明论（Proof Theory），可计算性理论（Computability theory），再加上TACL（Topology, Algebra and Categories in Logic）

现代逻辑体系结构

- 经典逻辑：命题逻辑（propositional logic），一阶逻辑（first-order logic）
- 数理逻辑（基于经典逻辑对数学基础的研究）：集合论（Set Theory），模型论（Model Theory），证明论（Proof Theory），可计算性理论（Computability theory），再加上TACL（Topology, Algebra and Categories in Logic）
- 哲学逻辑（有哲学起源的非经典逻辑）：模态逻辑（modal logic），认知逻辑（Epistemic Logic），动态逻辑（Dynamic Logic），道义逻辑（Deontic Logic），时态逻辑（Tense Logic），直觉主义逻辑（Intuitionistic logic），多值逻辑（Multi-valued Logic）等.

逻辑在计算机和哲学的应用

逻辑在计算机和哲学的应用

- 计算机相关的逻辑（Logic in Computer Science）：自动机理论（Automata Theory），有穷模型论（Finite Model Theory），模型检测（Model checking），自动定理证明（Automated theorem proving），可满足性判定（SAT），逻辑程序（Logic programming），计算复杂性（Computational Complexity），程序设计语言的语义，人工智能中的逻辑等.

逻辑在计算机和哲学的应用

- 计算机相关的逻辑（Logic in Computer Science）：自动机理论（Automata Theory），有穷模型论（Finite Model Theory），模型检测（Model checking），自动定理证明（Automated theorem proving），可满足性判定（SAT），逻辑程序（Logic programming），计算复杂性（Computational Complexity），程序设计语言的语义，人工智能中的逻辑等.
- 逻辑在分析哲学中的应用：数学哲学，逻辑哲学，知识论，形而上学，语言哲学，科学哲学，心灵哲学，伦理学，宗教哲学等

悖论

- 悖论是如下一类论证:
  (1) 前提看起来为真;
  (2) 推理看起来有效;
  (3) 结论或者导致矛盾，或者为假，或者荒谬，或者是理智上不可接受的
- 导致悖论的常见因素：自指，无穷倒退，循环定义，混淆不同层次的抽象
- 悖论挑战人类思维的极限，对来自数学、逻辑、哲学、科学及生活中的悖论的研究极大的推动各学科的发展，深化和更新我们对悖论涉及的核心概念的理解
- 现代逻辑研究悖论产生的根源，消解悖论的方法及与悖论相关的数学基础和哲学问题

第一次数学危机

- 毕达哥拉斯，公元前五世纪古希腊著名的数学家、哲学家，曾创立毕达哥拉斯学派。其著名命题“万物皆数”是该学派的哲学基石；“一切数均可表成整数或整数之比”是这一学派的数学信仰。
- 毕达哥拉斯定理(勾股定理)：直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方。
- 学派成员希帕索斯提出一个问题：边长为1的正方形其对角线长度是多少？他发现这一长度既不能用整数也不能用分数表示，而只能用一个新数来表示。

- 希帕索斯的发现导致数学史上第一个无理数 $\sqrt{2}$ 的诞生，在当时的数学界掀起了一场巨大风暴，直接动摇了毕达哥拉斯学派的数学信仰。
- 这一伟大发现不仅对于毕达哥拉斯学派而且对于当时所有古希腊人的观念都是一个极大的冲击。
- 这一结论的悖论性表现在它与常识的冲突上：任何量，在任何精确度的范围内，都可以表示成有理数。这不但在希腊当时是人们普遍接受的信仰，就是在今天测量技术已经高度发展的时代，这个断言也毫无例外是正确的！

$\sqrt{2}$ 不是有理数

定理

$\sqrt{2}$ 不是有理数。

Proof.

- 使用反证法。假设 $\sqrt{2}$ 是有理数且 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
- 不妨假设 m 与 n的公约数为1.
- 则 $m^2 = 2 \times n^2$. 故 m为偶数。
- 不妨令 $m = 2k$. 则有: $n^2 = 2 \times k^2$.
- 故 n为偶数。这与 m 与 n的公约数为1矛盾!

令 ϕ 表示任意命题,要要证明 ϕ 成立,仅需证明:若 ϕ 不成立则导出矛盾。如何说明这一数学中常用的逻辑推理规则是有效的? □

- 牛顿和莱布尼兹被公认为微积分的奠基者，他们的功绩主要在于：把各种有关问题的解法统一成微分法和积分法，微分法和积分法互为逆运算。由于运算的完整性和应用的广泛性，微积分成为当时解决问题的重要工具.
- 牛顿和莱布尼茨的出发点都是直观的无穷小量，但在他们各自的论述中都没有给出无穷小量确定一贯的定义.
- 虽然牛顿、莱布尼兹没能给出无穷小量的精确定义和分析，微积分在很多领域都取得了丰硕的成果.
- 从现代的观点看，18世纪的数学思想是不严密的、直观的，强调形式的计算而不顾逻辑基础是否可靠.

贝克莱悖论

- 微积分的逻辑基础问题：无穷小量究竟是不是零？无穷小及其分析是否合理？
- 不清楚的无穷小概念导致导数、微分、积分等概念都不清楚；发散级数求和的任意性；符号的不严格使用；不考虑连续性就进行微分；不考虑导数及积分的存在性以及函数可否展成幂级数等等。
- 贝克莱悖论：在微积分的推导和运算过程中，常常是先用无穷小量作为分母进行除法，然后又把无穷小量当作零，以消除那些包含有它的项。那么"无穷小量"究竟是零还是非零呢？如果它是零，怎么能用它去作除数呢？如果它不是零，又怎么能把包含它的那些项消除掉呢？

第二次数学危机的解决

- 直到19世纪20年代，一些数学家才比较关注微积分的严格基础。从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里赫利等人的工作开始，到维尔斯特拉斯、戴德金和康托的工作结束，中间经历半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。
- 波尔查诺给出了连续性的正确定义；阿贝尔指出要严格限制滥用级数展开及求和；柯西(1789—1857)于1821年出版的《分析教程》中，开始有了极限概念的基本明确的叙述，并以极限概念为基础，对“无穷小量”、“无穷级数的和”等概念给出了比较明确的定义；并且使用极限概念定义了导数和积分；狄里赫利给出了函数的现代定义。
- 在这些工作的基础上，维尔斯特拉斯给出现在通用的极限和连续的定义，并把导数、积分严格地建立在极限的基础上。

第二次数学危机的影响

- 19世纪70年代初，维尔斯特拉斯、戴德金和康托等人独立地建立了实数理论，而且在实数理论的基础上建立起极限论的基本定理，使数学分析建立在实数理论的严格基础之上。
- 从极限的观点看，无穷小量不是固定的量而是变量，“无穷小量”就是极限为零的变量，在变化过程中，它可以是非零，但它的变化趋向是零，无限地接近于零。极限论正是从变化趋向上说明了“无穷小量”与零的内在联系，从而澄清了逻辑上的混乱。
- 第二次数学危机也促进了19世纪的分析严格化、代数抽象化以及几何非欧化的进程。

定理

实数系基本定理 如下命题是等价的:

(1) 完备性定理:任意非空有界的实数子集有上确界.

(2) 单调收敛定理:单调有界的实数序列有极限.

(3) 闭区间套定理

(4) 有界收敛子序列定理:有界的实数列有收敛的子序列.

(5) 柯西定理:柯西序列都收敛.

关于无穷的传统观点

传统观点

1. 整体大于部分
2. 只有两种集合：有限集和无穷集；无穷集没有不同的大小
3. 区分潜无穷和实无穷，认为无穷只是一不断实现的过程，而不是已完成的实体；只存在潜无穷，不存在实无穷

现代观点

1. 整体可以和部分具有相同的大小；无穷集的本质是其可和某一真子集具有相同的大小
2. 无穷集是分层级的，无穷集有不同的大小，任何集合都存在比它更大的集合
3. 数学家和逻辑学家普遍接受实无穷，实无穷不是潜在的过程而是已完成的实体

伽利略悖论

1. 伽利略问题：全体自然数和全体自然数的平方，谁包含的数更多？
2. 观察：所有自然数和自然数的平方可建立一一对应
3. 常识：自然数比平方数多很多
4. 伽利略结论：全体自然数不是一个集合

康托尔

- 康托尔(Cantor, 1845-1918), 德国数学家，集合论的创始人。
- 两千多年来，科学家们接触到无穷却又无力去把握和认识它，这的确是向人类提出的尖锐挑战。康托尔以其思维之独特，想象力之丰富，方法之新颖绘制了一幅人类智慧的精品：集合论和超限数(序数、基数)理论。“关于数学无穷的革命几乎是由他一个人独立完成的。”希尔伯特高度赞誉康托尔的集合论“是数学天才最优秀的作品”，“是人类纯粹智力活动的最高成就之一”，“是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”。

罗素对康托尔贡献的评价

“芝诺关心过三个问题：无穷小，无穷和连续的问题，从他那时代到我们自己的时代，每一时代最优秀有才智的人都试图解决这些问题，但广义的说，什么也没得到。维尔斯特拉斯，戴德金和康托尔彻底解决了它们。他们的解答清楚的不再留下丝毫怀疑，这个成就可能是这个时代能够夸耀的最伟大的成就。无穷小问题是维尔斯特拉斯解决的，另两个问题是由戴德金开始，最后是由康托尔完成的。”

现代集合论对无穷的理解

1. 集合X的大小记为$|X|$. 给定集合A和B，$|A| = |B|$当且仅当存在 A 到 B 的一一对应
2. $|A| \leq |B|$当且仅当存在A到B的单射
3. $|A| < |B|$当且仅当 $|A| \leq |B|$ 但并非 $|B| = |A|$
4. 一集合是有限集当且仅当它不能与某一真子集建立一一对应
5. 一集合是无穷集当且仅当它可与某一真子集建立一一对应
6. 一集合是可数集当且仅当它可与自然数集建立一一对应

希尔伯特旅馆

- 设想另一家旅馆，内设可数无穷个房间，所有的房间也都客满了。这时也有一位新客，想订个房间。
- “不成问题！”旅馆主人说。接着他就把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到3号房间，3号房间的旅客移到4号房间等等，这样继续移下去。这样一来，新客就被安排住进了已被腾空的1号房间。
- 我们再设想一个有可数无穷个房间的旅馆，各个房间也都住满了客人。这时又来了可数无穷多位要求订房间的客人。
- “不成问题！”旅馆主人说。于是他把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到4号房间，3号房间的旅客移到6号房间，如此等等，这样继续下去。现在，所有的单号房间都腾出来了，新来的可数无穷多位客人可以住进去，问题解决了！

例

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$，但 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

- 定义 $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. 要证 $\mathbb{R}$ 不可数，仅需证 $(0,1)$不可数。
- 每个 $(0,1)$中的有理数都可表示成无穷循环小数；每个 (0,1)中的无理数都可唯一表示成无穷不循环小数。
- 每个 $(0,1)$中的有理数既可表示成循环数字为0的无穷循环小数，又可表示为循环数字为9的无穷循环小数。如0.5 既可表示为 $0.50000\cdots$, 又可表示为 $0.4999\cdots$.
- 我们规定有理数仅表示为循环数字为9的无穷循环小数。
- 在此规定下，每个 $(0,1)$中的实数都可唯一表示为形如 $0.a_0a_1\cdots a_i\cdots$ 的小数，其中 $a_i \in \mathbb{N}$.

实数集不可数的证明：续

- 使用反证法：假设 $(0,1)$ 是可数集且 $(0,1) = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- 我们可将 $(0,1)$中的数列举表示如下：

$$b_0 = 0.c_{00}c_{01}\cdots c_{0n}\cdots$$

$$b_1 = 0.c_{10}c_{11}\cdots c_{1n}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n = 0.c_{n0}c_{n1}\cdots c_{nn}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

- 定义 $x = 0.d_0d_1\cdots d_n\cdots$ 如下：其中 $d_n = 2$ if $c_{nn} = 1$; $d_n = 1$ if $c_{nn} \neq 1$.
- 易见 $x \in (0,1)$. 但对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 因 $d_n \neq c_{nn}$, 故 $x \neq b_n$. 这导致矛盾.

给定集合X，$\mathcal{P}(X)=\{z:z\subseteq X\}$ 记为 X 的幂集.

定理

对任意集合X，$|X|<|\mathcal{P}(X)|$.

- 易证$|X|\leq|\mathcal{P}(X)|$. 仅需证不存在X到 $\mathcal{P}(X)$的满射。
- 假设$F:X\to\mathcal{P}(X)$是满射。
- 定义集合Z如下：$Z=\{a\in X:a\notin F(a)\}$.
- 因F是满射，则存在$a\in X$ 使得$F(a)=Z$.
- 则 $a\in Z$ 当且仅当$a\notin Z$. 矛盾!
- 故不存在X到 $\mathcal{P}(X)$的满射。

第三次数学危机：罗素悖论

- 无限制概括规则：对任意的性质P，我们都可以定义一个集合S 使得 a 属于S 当且仅当 a 具有性质 P。
- 考虑如下性质 $P(x)$：x 是集合且x 不属于x
- 根据无限制概括规则，存在集合 S 使得a 属于S 当且仅当a 是集合且 a 不属于a
- 问题：S 是否属于S？
- 若S 属于S，则根据S 的定义，S 不属于S
- 若S 不属于S，则根据S 的定义，S 属于S

- 罗素悖论一提出就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大震动。德国的著名逻辑学家弗雷格在他的关于集合的基础理论完稿付印时，收到了罗素关于这一悖论的信，他在自己著作的末尾写道："一个科学家所碰到的最倒霉的事，莫过于是在他的工作即将完成时却发现所干的工作的基础崩溃了。"
- 罗素悖论提出后，数学家们纷纷提出自己的解决方案。人们希望能够通过对康托尔的集合论进行改造，通过对集合定义加以限制来排除悖论，这就需要建立新的原则。这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾；另一方面又必须充分广阔，使康托尔集合论中一切有价值的内容保存下来。
- 公理化集合论的建立，避免了集合论中出现的悖论，从而比较圆满地解决了第三次数学危机。

常用的命题联结词及其符号

常用的命题联结词及其符号

- $\neg$ 并非______ 否定

常用的命题联结词及其符号

- $\neg$ 并非______ 否定
- $\wedge$ ______ 并且 ______ 合取

常用的命题联结词及其符号

$\neg$	并非______	否定
$\wedge$	______ 并且 ______	合取
$\vee$	______ 或者 ______	析取

常用的命题联结词及其符号

$\neg$	并非_____	否定
$\wedge$	_____ 并且 _____	合取
$\vee$	_____ 或者 _____	析取
$\rightarrow$	如果_____ 那么_____	蕴涵

常用的命题联结词及其符号

$\neg$	并非______	否定
$\wedge$	______ 并且 ______	合取
$\vee$	______ 或者 ______	析取
$\rightarrow$	如果______ 那么______	蕴涵
$\leftrightarrow$	______ 当且仅当 ______	等值

欧式几何是一个公理系统，通过有限的公理来证明所有的关于平面几何的真命题。欧式几何的五条公理是：

(1) 过相异两点，能作且只能作一直线（直线公理）。

(2) 线段(有限直线)可以任意地延长。

(3) 以任一点为圆心、任意长为半径，可作一圆(圆公理)。

(4) 凡是直角都相等(角公理)。

(5) 在一平面内，过直线外一点，可作且只可作一直线跟此直线平行(平行公理)。

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$
- 命题逻辑联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$
- 命题逻辑联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- 辅助性符号：(,)

命题公式的定义：

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$
- 命题逻辑联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- 辅助性符号：(,)

命题公式的定义：

(1) 命题变元是命题公式；

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$
- 命题逻辑联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- 辅助性符号：(,)

命题公式的定义：

(1) 命题变元是命题公式；

(2) 若 ϕ 是命题公式，则 $(\neg\phi)$ 也是命题公式；

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$
- 命题逻辑联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- 辅助性符号：(,)

命题公式的定义：

(1) 命题变元是命题公式；

(2) 若 ϕ 是命题公式，则 $(\neg\phi)$ 也是命题公式；

(3) 若 ϕ, φ 是命题公式，则 $(\phi \wedge \varphi), (\phi \vee \varphi), (\phi \rightarrow \varphi), (\phi \leftrightarrow \varphi)$ 也是命题公式；

命题逻辑符号表 $\mathfrak{L}_0$

- 命题变元：$p_1, p_2, \cdots, p_n \cdots$
- 命题逻辑联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- 辅助性符号：(,)

命题公式的定义：

(1) 命题变元是命题公式；

(2) 若 ϕ 是命题公式，则 $(\neg\phi)$ 也是命题公式；

(3) 若 ϕ, φ 是命题公式，则 $(\phi \wedge \varphi), (\phi \vee \varphi), (\phi \rightarrow \varphi), (\phi \leftrightarrow \varphi)$ 也是命题公式；

(4) 一符号串是命题公式当且仅当它是由有限次应用规则(1)-(3)形成的

命题形式系统 P

令 ϕ, ψ, χ表示任意的命题公式。具有下述三种形式之一的命题公式都是 **P** 的公理：

A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$

A2 $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

A3 $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$

P 的推演规则只有一条，即分离规则：

MP 从 $\phi \to \psi$ 和 ϕ 得到 ψ

定义

令 Σ 为 $\mathfrak{L}_0$-公式集，ϕ 为 $\mathfrak{L}_0$-公式:

定义

令 Σ 为 $\mathfrak{L}_0$-公式集，ϕ 为 $\mathfrak{L}_0$-公式:

(1) 以 Γ为前提在 **P** 中可演绎推出ϕ（记作 $\Gamma \vdash_{\mathbf{P}} \phi$）当且仅当存在满足下列条件的公式序列 $\phi_0, \ldots, \phi_n$: $\phi_n = \phi$, 并且对于任意 $k \leqslant n$，或者 ϕ_k 是 **P** 的公理，或者 $\phi_k \in \Gamma$，或者存在 $i, j < k$ 使得 ϕ_k 是由 ϕ_i和 ϕ_j 使用分离规则而得.

定义

令 Σ 为 $\mathfrak{L}_0$-公式集，ϕ 为 $\mathfrak{L}_0$-公式:

(1) 以 Γ 为前提在 **P** 中可演绎推出 ϕ （记作 $\Gamma \vdash_{\mathbf{P}} \phi$）当且仅当存在满足下列条件的公式序列 $\phi_0, \ldots, \phi_n$: $\phi_n = \phi$, 并且对于任意 $k \leqslant n$，或者 ϕ_k 是 **P** 的公理，或者 $\phi_k \in \Gamma$，或者存在 $i, j < k$ 使得 ϕ_k 是由 ϕ_i 和 ϕ_j 使用分离规则而得.

(2) ϕ 是 **P** 的定理（记作 $\vdash_{\mathbf{P}} \phi$）当且仅当 $\emptyset \vdash_{\mathbf{P}} \phi$.

定义

真值赋值 真值赋值是从命题变元集到 $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ 的函数：它对每个命题变元都指派一个真值.

真理定义 对任意命题公式 ϕ 及真值赋值 σ，我们用 ϕ^σ 表示 ϕ 在 σ 下的真值。ϕ^σ 递归地定义如下：

$$
\begin{aligned}
p_n^\sigma &= \mathrm{T} \;\; \textit{iff} \;\; \sigma(p_n) = \mathrm{T} \\
(\neg\psi)^\sigma &= \mathrm{T} \;\; \textit{iff} \;\; \psi^\sigma = \mathrm{F} \\
(\psi \vee \chi)^\sigma &= \mathrm{T} \;\; \textit{iff} \;\; \text{或者 } \psi^\sigma = \mathrm{T} \text{ 或者 } \chi^\sigma = \mathrm{T} \\
(\psi \wedge \chi)^\sigma &= \mathrm{T} \;\; \textit{iff} \;\; \psi^\sigma = \mathrm{T} \text{ 并且 } \chi^\sigma = \mathrm{T} \\
(\psi \to \chi)^\sigma &= \mathrm{F} \;\; \textit{iff} \;\; \text{或者 } \psi^\sigma = \mathrm{T} \text{ 并且 } \chi^\sigma = \mathrm{F} \\
(\psi \leftrightarrow \chi)^\sigma &= \mathrm{T} \;\; \textit{iff} \;\; \psi^\sigma = \chi^\sigma
\end{aligned}
$$

定义

(1) 命题公式 ϕ 是重言式当且仅当对任意真值赋值 $\sigma, \phi^\sigma = \mathrm{T}$

(2) Γ 重言蕴涵 ϕ 当且仅当对任意真值赋值 σ, 若对任意的 $\psi \in \Gamma$ 我们有 $\psi^\sigma = \mathrm{T}$, 则 $\phi^\sigma = \mathrm{T}$.

P的可靠性定理 若 $\Gamma \vdash_{\mathbf{P}} \phi$，则 Γ 重言蕴涵 ϕ; 特别的，若 ϕ 是 **P** 中的定理，则 ϕ 是重言式.

P的完备性定理 若 Γ 重言蕴涵 ϕ, 则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{P}} \phi$; 特别的，若 ϕ 是重言式，则 ϕ 是 **P** 中的定理.

P 是可靠完备的 $\Gamma \vdash_{\mathbf{P}} \phi$ 当且仅当 Γ 重言蕴涵 ϕ; 特别的, ϕ 是**P**的定理当且仅当 ϕ 是重言式.

谓词逻辑符号表 $\mathfrak{L}_1$

逻辑符号

1. $\mathfrak{L}_1$-个体变元: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_n, \cdots$
2. 命题联结词： $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. 量词符号: $\forall$ 与 $\exists$
4. (,)（左右括号）

非逻辑符号

1. 一集（可以是空集） $\mathfrak{L}_1$-个体常项
2. 对于任意 $n \geqslant 1$，$\mathfrak{L}_1$ 有一集（可以是空集） n 元函数符号
3. 对于任意 $n \geqslant 1$，$\mathfrak{L}_1$ 有一集（可以是空集） n 元谓词符号 (包括等词 $\equiv$)；$\mathfrak{L}_1$ 至少有一个谓词符号

$\mathfrak{L}_1$-项

- 所有个体变元都是$\mathfrak{L}_1$-项；
- 所有个体常项都是$\mathfrak{L}_1$-项；
- 对于任意 $n \geqslant 1$，如果 f 是 $\mathfrak{L}_1$-的 n 元函数符号且 $t_1, \ldots, t_n$ 是$\mathfrak{L}_1$-项，那么 $\mathsf{f}t_1 \ldots t_n$ 也是$\mathfrak{L}_1$-项；
- 只有这些是$\mathfrak{L}_1$-项。

$\mathfrak{L}_1$-公式

- 对任意 n 元谓词 P 和任意$\mathfrak{L}_1$-项 $t_1, \ldots, t_n$，$Pt_1 \ldots t_n$ 是$\mathfrak{L}_1$-原子公式
- 如果 ϕ 和 ψ 是$\mathfrak{L}_1$-公式，那么 $\neg\phi$ 和 $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ 都是$\mathfrak{L}_1$-公式
- 如果 ϕ 是$\mathfrak{L}_1$-公式且 x 是$\mathfrak{L}_1$ 的个体变元，那么 $\forall x\phi$ 和 $\exists x\phi$ 都是 $\mathfrak{L}_1$-公式
- 只有这些是$\mathfrak{L}_1$-公式

谓词逻辑的应用：儿子论证

谓词逻辑的应用：儿子论证

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

谓词逻辑的应用：儿子论证

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

结论：我的儿子就是我

谓词逻辑的应用：儿子论证

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

结论：我的儿子就是我

论证如下：

谓词逻辑的应用：儿子论证

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

结论：我的儿子就是我

论证如下：

既然人人都爱我的儿子，而我的儿子是人，所以我的儿子爱我的儿子。

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

结论：我的儿子就是我

论证如下：

既然人人都爱我的儿子，而我的儿子是人，所以我的儿子爱我的儿子。

我的儿子只爱我是说：对任何的 x，若我的儿子爱 x，那么 x 就是我。

谓词逻辑的应用：儿子论证

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

结论：我的儿子就是我

论证如下：

既然人人都爱我的儿子，而我的儿子是人，所以我的儿子爱我的儿子。

我的儿子只爱我是说：对任何的 x，若我的儿子爱 x，那么 x 就是我。

从而如果我的儿子爱我的儿子，那么我的儿子就是我。

谓词逻辑的应用：儿子论证

前提：人人都爱我的儿子；我的儿子只爱我，我的儿子是人

结论：我的儿子就是我

论证如下：

既然人人都爱我的儿子，而我的儿子是人，所以我的儿子爱我的儿子。

我的儿子只爱我是说：对任何的 x，若我的儿子爱 x，那么 x 就是我。

从而如果我的儿子爱我的儿子，那么我的儿子就是我。

既然我的儿子爱我的儿子，所以我的儿子就是我。

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；
b: 我的儿子；i: 我

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；

b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；

b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

(2) $\forall x((L(b,x) \land P(x)) \to x \equiv i)$

儿子论证的逻辑结构

符号化　论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x, y)$: x爱y；

b: 我的儿子；i: 我

前提　(1) $\forall x(P(x) \rightarrow L(x, b))$

(2) $\forall x((L(b, x) \wedge P(x)) \rightarrow x \equiv i)$

(3) $P(b)$

结论　$b \equiv i$

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；

b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

(2) $\forall x((L(b,x) \wedge P(x)) \to x \equiv i)$

(3) $P(b)$

结论 $b \equiv i$

推理 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；
b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

(2) $\forall x((L(b,x) \land P(x)) \to x \equiv i)$

(3) $P(b)$

结论 $b \equiv i$

推理 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

(2) $P(b) \to L(b,b)$

儿子论证的逻辑结构

符号化　论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；
b: 我的儿子；i: 我

前提　(1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$
(2) $\forall x((L(b,x) \wedge P(x)) \to x \equiv i)$
(3) $P(b)$

结论　$b \equiv i$

推理　(1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$
(2) $P(b) \to L(b,b)$
(3) $P(b)$

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x, y)$: x爱y；

b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x, b))$

(2) $\forall x((L(b, x) \wedge P(x)) \to x \equiv i)$

(3) $P(b)$

结论 $b \equiv i$

推理 (1) $\forall x(P(x) \to L(x, b))$

(2) $P(b) \to L(b, b)$

(3) $P(b)$

(4) $L(b, b)$

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x, y)$: x爱y；
b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x, b))$
(2) $\forall x((L(b, x) \land P(x)) \to x \equiv i)$
(3) $P(b)$

结论 $b \equiv i$

推理 (1) $\forall x(P(x) \to L(x, b))$
(2) $P(b) \to L(b, b)$
(3) $P(b)$
(4) $L(b, b)$
(5) $\forall x((L(b, x) \land P(x)) \to x \equiv i)$

儿子论证的逻辑结构

符号化　论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；
b: 我的儿子；i: 我

前提　(1) $\forall x(P(x) \rightarrow L(x,b))$

(2) $\forall x((L(b,x) \wedge P(x)) \rightarrow x \equiv i)$

(3) $P(b)$

结论　$b \equiv i$

推理　(1) $\forall x(P(x) \rightarrow L(x,b))$

(2) $P(b) \rightarrow L(b,b)$

(3) $P(b)$

(4) $L(b,b)$

(5) $\forall x((L(b,x) \wedge P(x)) \rightarrow x \equiv i)$

(6) $(L(b,b) \wedge P(b)) \rightarrow b \equiv i$

儿子论证的逻辑结构

符号化 论域：所有的个体；$P(x)$: x是人；$L(x,y)$: x爱y；
b: 我的儿子；i: 我

前提 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

(2) $\forall x((L(b,x) \wedge P(x)) \to x \equiv i)$

(3) $P(b)$

结论 $b \equiv i$

推理 (1) $\forall x(P(x) \to L(x,b))$

(2) $P(b) \to L(b,b)$

(3) $P(b)$

(4) $L(b,b)$

(5) $\forall x((L(b,x) \wedge P(x)) \to x \equiv i)$

(6) $(L(b,b) \wedge P(b)) \to b \equiv i$

(7) $b \equiv i$

符号化

例

极限的数学定义 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 当且仅当对任意的实数 $\epsilon > 0$,
存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对任意的 $m > n$, 有 $|a_m - a| < \epsilon$.

极限定义的符号化 论域：实数集；$>$: 大于关系；$\mathbf{0}$：实数0；
$\mathbf{N}(x)$: x 是自然数；$f(x,y) = x - y$; $g(x) = |x|$
$\forall\epsilon(\epsilon > \mathbf{0} \to \exists n(\mathbf{N}(n) \wedge \forall m(m > n \to |f(a_n, a)| < \epsilon)))$.

例

(1) 对任意的人 x, 若任意的人喜欢 x, 则 x 是好学生；

(2) 对任意的人 x 和 y, 若 y 喜欢 x, 则 x 是好学生。

符号化 (1) $\forall x(\forall y Lyx \to Gx)$

(2) $\forall x \forall y(Lyx \to Gx)$ (等价于 $\forall x(\exists y\, Lyx \to Gx)$)

谓词逻辑形式系统 H的公理模式

其中 ϕ, ψ 为 $\mathfrak{L}_1$-公式，$s, s', t, t_1, \ldots, t_n$ 为 $\mathfrak{L}_1$-项，$\mathbf{f}$ 为 $\mathfrak{L}_1$ 的 n 元函数符号，P 为 $\mathfrak{L}_1$ 的 n 元谓词符号：

Ax1 $\phi \to (\psi \to \phi)$

Ax2 $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

Ax3 $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$

Ax4 $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$

Ax5 $\forall x\phi \to \phi(t/x)$ t 对 x 在 ϕ 中可自由代入

Ax6 $\phi \to \forall x\phi$ x 不在 ϕ 中自由出现

Ax7 $t \equiv t$

Ax8 $s \equiv s' \to \mathbf{f}t_1 \ldots t_{k-1}st_{k+1} \ldots t_n \equiv \mathbf{f}t_1 \ldots t_{k-1}s't_{k+1} \ldots t_n$

Ax9 $s \equiv s' \to (Pt_1 \ldots t_{k-1}st_{k+1} \ldots t_n \to Pt_1 \ldots t_{k-1}s't_{k+1} \ldots t_n)$

Ax10 $\forall x_1 \cdots \forall x_n\phi$ ϕ 是具有 Ax1-Ax9 任一形式的 $\mathfrak{L}_1$-公式。

$\mathbf{H}$ 的推演规则: 分离规则(MP) 从 ϕ 和 $\phi \to \psi$ 得到 ψ

定义

设 Γ 为任意$\mathfrak{L}_1$-公式集，并设 ϕ 为任意 $\mathfrak{L}_1$-公式。

1. 以 Γ为前提在 **H** 中可演绎推出ϕ ($\Gamma \vdash \phi$) 当且仅当存在满足下列条件的公式序列 $\phi_0, \ldots, \phi_n$: $\phi_n = \phi$, 并且对于任意 $k \leqslant n$，或者 ϕ_k 是 **H** 的公理，或者 $\phi_k \in \Gamma$，或者存在 $i, j < k$ 使得 ϕ_k 是由 ϕ_i和 ϕ_j 使用分离规则而得.
2. Γ 是一致的当且仅当以 Γ 为前提在 **H** 中不可演绎推出 $x \neq x$.

结构与模型

- 一个 $\mathfrak{L}_1$-结构对 $\mathfrak{L}_1$ 中所有非逻辑符号给出一个解释，包括个体常项的解释（个体）、函数符号的解释（运算）和谓词符号的解释（关系）
- 模型是在结构的基础上对每个个体变元指派论域中某一元素为值
- 给定结构的论域 A，我们可如下解释任一谓词公式：

结构与模型

- 一个 $\mathfrak{L}_1$-结构对 $\mathfrak{L}_1$ 中所有非逻辑符号给出一个解释，包括个体常项的解释（个体）、函数符号的解释（运算）和谓词符号的解释（关系）
- 模型是在结构的基础上对每个个体变元指派论域中某一元素为值
- 给定结构的论域 A，我们可如下解释任一谓词公式：
  1. 个体变元并非指称论域 A 中某一特定元素，它可取论域 A 中任一元素为值

结构与模型

- 一个 $\mathfrak{L}_1$-结构对 $\mathfrak{L}_1$ 中所有非逻辑符号给出一个解释，包括个体常项的解释（个体）、函数符号的解释（运算）和谓词符号的解释（关系）
- 模型是在结构的基础上对每个个体变元指派论域中某一元素为值
- 给定结构的论域 A，我们可如下解释任一谓词公式：
  1. 个体变元并非指称论域 A 中某一特定元素，它可取论域 A 中任一元素为值
  2. 常元符号解释为论域 A 中的特定元素

结构与模型

- 一个 $\mathfrak{L}_1$-结构对 $\mathfrak{L}_1$ 中所有非逻辑符号给出一个解释，包括个体常项的解释（个体）、函数符号的解释（运算）和谓词符号的解释（关系）
- 模型是在结构的基础上对每个个体变元指派论域中某一元素为值
- 给定结构的论域 A，我们可如下解释任一谓词公式：
  1. 个体变元并非指称论域 A 中某一特定元素，它可取论域 A 中任一元素为值
  2. 常元符号解释为论域 A 中的特定元素
  3. n元函数符号解释为论域 A 上的n元函数 $f : A^n \to A$ (f 将 A^n 中的每一元素都唯一映射为 A 中的元素)

结构与模型

- 一个 $\mathfrak{L}_1$-结构对 $\mathfrak{L}_1$ 中所有非逻辑符号给出一个解释，包括个体常项的解释（个体）、函数符号的解释（运算）和谓词符号的解释（关系）
- 模型是在结构的基础上对每个个体变元指派论域中某一元素为值
- 给定结构的论域 A，我们可如下解释任一谓词公式：
  1. 个体变元并非指称论域 A 中某一特定元素，它可取论域 A 中任一元素为值
  2. 常元符号解释为论域 A 中的特定元素
  3. n元函数符号解释为论域 A 上的n元函数 $f : A^n \to A$ (f 将 A^n 中的每一元素都唯一映射为 A 中的元素)
  4. n元谓词符号解释为论域 A 上的n元关系

结构与模型

- 一个 $\mathfrak{L}_1$-结构对 $\mathfrak{L}_1$ 中所有非逻辑符号给出一个解释，包括个体常项的解释（个体）、函数符号的解释（运算）和谓词符号的解释（关系）
- 模型是在结构的基础上对每个个体变元指派论域中某一元素为值
- 给定结构的论域 A，我们可如下解释任一谓词公式：
  1. 个体变元并非指称论域 A 中某一特定元素，它可取论域 A 中任一元素为值
  2. 常元符号解释为论域 A 中的特定元素
  3. n元函数符号解释为论域 A 上的n元函数 $f : A^n \to A$ (f 将 A^n 中的每一元素都唯一映射为 A 中的元素)
  4. n元谓词符号解释为论域 A 上的n元关系
  5. 等词符号 $\equiv$ 解释为论域 A 上特殊的二元关系，表示等同关系

结构的定义

定义

一个 $\mathfrak{L}_1$-结构是个有序对 $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$，其中$A$ 是个非空集合（称为 $\mathfrak{A}$ 的论域），I 是个“解释”函数，满足以下条件：

1. 对于 $\mathfrak{L}_1$ 的每一个体常项 $\mathbf{c}$，$I(\mathbf{c})$ (记为 $\mathbf{c}^{\mathfrak{A}}$) 是 A 的元素，亦即 $\mathbf{c}^{\mathfrak{A}} \in A$;
2. 对每个 $n \geqslant 1$，以及每个 $\mathfrak{L}_1$ 的 n 元函数符号 $\mathbf{f}$，$I(\mathbf{f})$ (记为 $\mathbf{f}^{\mathfrak{A}}$) 是 A 上的 n 元运算；
3. 对每个 $n \geqslant 1$，以及每个 $\mathfrak{L}_1$ 的 n 元非逻辑谓词 P，$I(P)$ (记为 $P^{\mathfrak{A}}$) 是 A 上的 n 元关系。

定义

- $\mathfrak{L}_1$-模型是一个序对 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}, \sigma \rangle$ (或三元组 $\langle A, I, \sigma \rangle$)，其中$\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ 是 $\mathfrak{L}_1$-结构, σ 是一个从个体变项集 **Var** 到 A 的函数。
- 给定结构 $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ 上的模型 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}, \sigma \rangle$, 对所有项 t，我们递归地定义 $t^{\mathcal{M}}$ (t 在 $\mathcal{M}$ 下的值) 如下：
  1. 对所有个体常项 $\mathbf{c}$ 和个体变项 x，我们已定义 $\mathbf{c}^{\mathcal{M}}$ 和 $x^{\mathcal{M}}$。
  2. 对任意 n 元函数符号 $\mathbf{f}$ 和任意项 $t_1, \ldots, t_n$，

$$(\mathbf{f}t_1 \ldots t_n)^{\mathcal{M}} = \mathbf{f}^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}})。$$

定义

设 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}, \sigma \rangle$ 为结构 $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ 上的任意模型，并设 $a \in A$。定义模型 $\mathcal{M}(x/a)$如下：$\mathcal{M}(x/a) = \langle \mathfrak{A}, \sigma' \rangle$。其中其中 σ' 满足：

1. $\sigma'(x) = a$;
2. 对每一个体变项 y，如果 $y \neq x$ 则 $\sigma'(y) = \sigma(y)$。

给定结构 $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ 上的模型 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}, \sigma \rangle$ 且 $a \in A$，那么我们有：

1. $x^{\mathcal{M}(x/a)} = a$;
2. 对每一个体变项 y，如果 $y \neq x$ 则 $y^{\mathcal{M}(x/a)} = y^{\mathcal{M}}$;
3. 对每一个体常项 $\mathbf{c}$，$\mathbf{c}^{\mathcal{M}(x/a)} = \mathbf{c}^{\mathcal{M}} = \mathbf{c}^{\mathfrak{A}}$;
4. 对每个 $n \geqslant 1$ 和每个 n 元函数符号 $\mathbf{f}$，$\mathbf{f}^{\mathcal{M}(x/a)} = \mathbf{f}^{\mathcal{M}} = \mathbf{f}^{\mathfrak{A}}$;
5. 对每个 $n \geqslant 1$ 和每个 n 元谓词 P，$P^{\mathcal{M}(x/a)} = P^{\mathcal{M}} = P^{\mathfrak{A}}$。

定义 (塔斯基真的定义)

给定模型 $\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}, \sigma \rangle$ 和公式 ϕ，我们递归定义 ϕ 在 $\mathcal{M}$ 下的真值 $\phi^{\mathcal{M}}$，其中 $s, t, t_1, \ldots, t_n$ 为项，P 为$n \geq 1$元谓词符：

1. $(s \equiv t)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$
2. $(Pt_1 \ldots t_n)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in P^{\mathcal{M}}$
3. $(\neg\psi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* $\psi^{\mathcal{M}} = \mathrm{F}$
4. $(\psi \wedge \chi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* $\psi^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ 并且 $\chi^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$
5. $(\psi \vee \chi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* $\psi^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ 或者 $\chi^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$
6. $(\psi \to \chi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{F}$*iff* $\psi^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ 并且 $\chi^{\mathcal{M}} = \mathrm{F}$
7. $(\psi \leftrightarrow \chi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$*iff* $\psi^{\mathcal{M}} = \chi^{\mathcal{M}}$
8. $(\forall x\psi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* 对每一个 $a \in A$, $\psi^{\mathcal{M}(x/a)} = \mathrm{T}$
9. $(\exists x\psi)^{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$ *iff* 对某个 $a \in A$, $\psi^{\mathcal{M}(x/a)} = \mathrm{T}$

给定 $\mathfrak{L}$结构 $\mathfrak{A}=\langle A, I\rangle$ 上的模型 $\mathcal{M}=\langle\mathfrak{A},\sigma\rangle$, 公式集 Γ 和公式 ϕ:

定义

1. Γ 是可满足的当且仅当存在某个模型 $\mathcal{M}$ 使得对任意 $\phi\in\Gamma$ 都有 $\phi^{\mathcal{M}}=\mathrm{T}$.
2. Γ 逻辑蕴涵ϕ (记为 $\Gamma\vDash\phi$) 当且仅当对每个模型 $\mathcal{M}$，若对任意 $\phi\in\Gamma$ 都有 $\phi^{\mathcal{M}}=\mathrm{T}$, 则 $\mathcal{M}\vDash\phi$。
3. 若对所有模型 $\mathcal{M}$都有 $\mathcal{M}\vDash\phi$，则称 ϕ 是逻辑有效式(或逻辑真理).

给定 $\mathfrak{L}_1$ 公式集 Γ 及 $\mathfrak{L}_1$ 公式 ϕ:

谓词逻辑可靠性定理 (1) 若 $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \phi$，则 $\Gamma \models \phi$;

(2) 若 Γ 可满足，则 Γ 是一致的.

谓词逻辑完备性定理 (1) 若 $\Gamma \models \phi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \phi$.

(2) 若 Γ 是一致的，则 Γ 可满足.

谓词逻辑紧致性定理 (1) Γ 可满足当且仅当 Γ 的每一有限子集都可满足。

(2) $\Gamma \models \phi$ 当且仅当 存在Γ 的有限子集Δ 使得$\Delta \models \phi$

定理

谓词逻辑可靠完备性定理 $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \phi$ 当且仅当 $\Gamma \models \phi$.

Γ 是一致的 当且仅当 Γ 可满足。

特别的，ϕ 是定理当且仅当 ϕ 是逻辑有效的。

令形式语言 $\mathfrak{L}$ 仅含一个非逻辑符号：二元谓词符 $<$。如下是几个关于序的理论。

1. 偏序理论 **PO** 由如下语句组成：
   (1) $\forall x(\neg x < x)$;
   (2) $\forall x \forall y \forall z(((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow x < z)$.
2. 线性序理论 **LO** 是由 **PO** 和如下语句组成：
$$\forall x \forall y(x < y \vee x \equiv y \vee y < x)。$$
3. 稠密无端点线性序理论 **DLO** 是由 **LO** 和如下语句组成：
   (1) $\forall x \forall y \exists z(x < z \wedge z < y)$;
   (2) $\forall x \exists y \exists z(y < x \wedge x < z)$.

例

1. $(\mathbf{Q}, <), (\mathbf{R}, <)$ 是 **DLO** 的模型；
2. $(\mathbf{Z}, <)$ 和 $(\mathbf{N}, <)$ 不是 **DLO** 的模型。

令形式语言 $\mathfrak{L}$ 的非逻辑符号包括：二元函数符 $\circ$ 和常元符号 e。

1. 群的理论 $\mathbf{T_G}$ 由如下语句组成：
   (1) $\forall x \forall y \forall z((x \circ y) \circ z) \equiv (x \circ (y \circ z))$;
   (2) $\forall x(x \circ e \equiv x \wedge e \circ x \equiv x)$;
   (3) $\forall x \exists y(x \circ y \equiv e \wedge y \circ x \equiv e)$.
2. 交换群理论 $\mathbf{T_{CG}}$ 由 $\mathbf{T_G}$ 和如下语句组成：
   $\forall x \forall y(x \circ y \equiv y \circ x)$。

例

1. $(\mathbf{Z}, +, \mathbf{0})$ 是 $\mathbf{T_{CG}}$ 的模型；
2. $(\mathbf{Z}, \times, \mathbf{1}), (\mathbf{Q}, \times, \mathbf{1}), (\mathbf{N}, +, \mathbf{0})$ 都不是 $\mathbf{T_{CG}}$ 的模型。

令形式语言 $\mathfrak{L}$ 的非逻辑符号包括：二元函数符 $+$ 和 $\times$，常元符号 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$。

1. 交换环理论 $\mathbf{T_R}$ 由如下语句组成：
   (1) $\forall x \forall y \forall z((x+y)+z) \equiv (x+(y+z))$;
   (2) $\forall x \forall y(x+y \equiv y+x)$;
   (3) $\forall x(x+\mathbf{0} \equiv x)$;
   (4) $\forall x \exists y(x+y \equiv \mathbf{0})$;
   (5) $\forall x \forall y \forall z((x \times y) \times z) \equiv (x \times (y \times z))$;
   (6) $\forall x \forall y(x \times y \equiv y \times x)$;
   (7) $\forall x(x \neq \mathbf{0} \to x \times \mathbf{1} \equiv x)$;
   (8) $\forall x \forall y \forall z(x \times (y+z) \equiv x \times y + x \times z)$.
2. 域理论 $\mathbf{T_F}$ 由 $\mathbf{T_R}$ 和如下语句组成：
   $\forall x \exists y(x \neq \mathbf{0} \to x \times y \equiv \mathbf{1})$.

例

(1) $(\mathbf{Z}, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 是 $\mathbf{T_R}$ 的模型，但不是 $\mathbf{T_F}$ 的模型。

(2) $(\mathbf{Q}, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 和 $(\mathbf{R}, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 是 $\mathbf{T_F}$ 的模型。

公理集合论 (ZFC)

存在公理 存在没有任何元素的集合

外延公理 若集合 A 中的元素都是集合 B中的元素，且集合 B中的元素都是集合 A中的元素，则 $A = B$.

分离公理(限制性概括规则) 令 $P(x)$为一特征。对任意集合 A，存在集合 B使得 $x \in B$ 当且仅当 $x \in A$ 且 $P(x)$ 成立。

配对公理 对任意集合 A和 B，存在集合 C使得 $x \in C$ 当且仅当 $x = A$ 或者 $x = B$.

并集公理 对任意集合 A，存在集合 B使得 $x \in B$ 当且仅当存在 $C \in A$ 使得 $x \in C$.

定义

集合X是归纳集若满足如下条件：$\emptyset \in I$ 且若 $a \in I$，则 $a \cup \{a\} \in I$.

- 冥集公理 对任意集合 A，存在集合 B使得 $x \in B$ 当且仅当 $x \subseteq A$.
- 无穷公理 存在一归纳集。
- 替换公理 令 $P(x,y)$为一特征使得对任意x 有唯一的y使得 $P(x,y)$成立。则对任意集合A，存在集合B使得对任意 $x \in A$ 存在 $y \in B$ 使得 $P(x,y)$ 成立.
- 正则公理 对任意集合 A, $\in$ 是 A上的良基关系。
- 选择公理 每个非空集族 $\langle X_i : i \in I \rangle$ 都有选择函数：存在f 使得对任意的 $i \in I, f(i) \in X_i$.

ZF 的语言仅包含一个非逻辑符号：二元谓词符 $\in$。 **ZF** 由如下语句组成：

1. $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \equiv y)$；
2. $\forall x \forall y \exists c \forall v (v \in c \leftrightarrow v \equiv x \vee v \equiv y)$；
3. $\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(v, y))$，其中 $\varphi(v, y)$ 是 **ZF** 的语言中的公式；
4. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge z \in v))$；
5. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall v (v \in z \rightarrow v \in x))$；
6. $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\}) \in x)$；
7. $\forall x \forall y \forall z \forall p (\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p) \rightarrow y \equiv z) \rightarrow \forall x \exists y \forall v (v \in y \leftrightarrow \exists u \in x \, \varphi(u, v, p))$，其中 $\varphi(x, y, p)$ 是 **ZF** 的语言中的公式；
8. $\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (x \cap y \equiv \emptyset))$。

定义

1. $0 \triangleq \emptyset$
2. $1 \triangleq \{0\}, \cdots$
3. $n \triangleq \{0, \cdots, n-1\}$
4. 定义集合 $\mathbb{N}$如下：$\mathbb{N} \triangleq \{x : x \in I$ 对任意归纳集$I\}$.
5. 定义 $\mathbb{N}$上的小于关系如下：$m < n \triangleq m \in n$, 对任意的 $m, n \in \mathbb{N}$.

$(\mathbb{N}, <)$ 具有经典数学中自然数集满足的一切性质。

实数系的构造 整数可由自然数构造，有理数可由整数构造，实数可由有理数构造

如下命题是等价的：

1. 选择公理
2. 良序原则：任意集合都可被良序化
3. Zorn引理: 对任意的偏序集$\langle A, \leq \rangle$, 若A 的任意链都有上界，则A 有极大元。

数学中如下重要定理的证明使用了选择公理：

代数 每个向量空间都有一组基; 极大理想定理：环中的每个理想都可扩充为极大理想

实变函数 勒贝格积分不可测集合的存在性

泛函分析 Hahan-巴拿赫延拓定理(The Hahn-Banach Extension Theorem), Banach-Steinhaus 定理（一致有界原理），开映射定理(Open Mapping Theorem), 闭图定理(Closed Graph Theorem)

拓扑 Baire Category Theorem, Tichonov 定理: 任意紧致拓扑空间的拓扑积是紧致的。

定义

1. 关系 $<$ 是集合 W上的良序关系当且仅当 $(W, <)$ 是线性序集且 W的每一非空子集都有最小元。
2. 集合 A是传递集当且仅当 A中的元素都是 A的子集。
3. 集合α 是序数当且仅当 α 是传递集且属于关系"$\in$" 是α上的良序关系。
4. 序数α 是基数当且仅当不存在从某一$\beta \in \alpha$ 到α 的双射。

定理

令α, β, γ 是序数。则如下命题成立：

1. 若$\alpha \in \beta$ 且 $\beta \in \gamma$, 则$\alpha \in \gamma$.
2. $\alpha \in \beta$ 和$\beta \in \alpha$ 不同时成立.
3. 或者 $\alpha \in \beta$ 或者 $\beta \in \alpha$ 或者 $\alpha = \beta$ 成立.
4. 每一非空的序数集有一关系$\in$ 下的最小元.
5. 对任意的序数集 X，存在序数α 使得$\alpha \notin X$.

- 对任意序数 $\alpha, \alpha = \{\beta : \beta$ 是序数且 $\beta \in \alpha\}$.
- 对任意非零序数 α, 若 α 中含有最大元素，则 $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ 对某一序数 β; 此时称 α 为后续序数；若 α 中没有最大元素，则 $\alpha = \sup(\{\beta : \beta \in \alpha\})$, 此时称 α 为极限序数.

数学归纳原则 令 $P(x)$ 为一特征。假设对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 我们有：

若对任意的 $k < n, P(k)$ 成立，则 $P(n)$成立。

则 $P(n)$对任意的自然数n成立。

超限归纳原则 令 $P(x)$ 为一特征。假设对任意的序数 α 我们有：

若对任意的 $\beta \in \alpha, P(\beta)$ 成立，则 $P(\alpha)$成立。

则 $P(\alpha)$对任意的序数 α 成立。

集域层级

定义 (集域层级)

令 $\mathbf{V}$ 为所有集合构成的类，$\mathbf{Ord}$ 为所有序数构成的类。定义集域层级 $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathbf{Ord}\rangle$ 如下：$V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, 若 α 是极限序数。

定理

(**ZF**) $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} V_\alpha$.

集域层级

定义 (集域层级)

令 $\mathbf{V}$ 为所有集合构成的类，**Ord** 为所有序数构成的类。定义集域层级 $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathbf{Ord} \rangle$ 如下：$V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, 若 α 是极限序数。

定理

(ZF) $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} V_\alpha$.

- 有限集位于 V_ω 中；经典数学的数学对象几乎都位于 $V_{\omega+\omega}$中。

集域层级

定义 (集域层级)

令 $\mathbf{V}$ 为所有集合构成的类，$\mathbf{Ord}$ 为所有序数构成的类。定义集域层级 $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathbf{Ord}\rangle$ 如下：$V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, 若 α 是极限序数。

定理

(ZF) $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} V_\alpha$.

- 有限集位于 V_ω 中；经典数学的数学对象几乎都位于 $V_{\omega+\omega}$中。
- 集合论是现代数学的基础，经典数学大多数定理都可在 **ZFC**中可证(事实上都可在 **ZFC** 的很弱的子系统二阶算术中可证)。

希尔伯特23个问题中的逻辑问题

连续统假设 1874年，康托猜测在可列集基数和实数基数之间没有别的基数，这就是著名的连续统假设。

算术公理的相容性 希尔伯特曾提出用形式主义计划的证明论方法证明算术公理的相容性。1931年，哥德尔发表的不完备性定理否定了这种看法。1936年德国数学家根茨在使用超限归纳法的条件下证明了算术公理的相容性。

丢番图方程的可解性 能求出一个整系数方程的整数根，称为丢番图方程可解。希尔伯特问，能否用一种由有限步构成的一般算法判断一个丢番图方程的可解性？1970年，苏联逻辑学家马季亚谢维奇证明了不存在这样的算法。

连续统假设

连续统假设 **CH** 若X是$\mathbb{R}$的无穷子集，则或者 $|X| = |\mathbb{N}|$，或者 $|X| = |\mathbb{R}|$

定理

CH 是独立于**ZFC**: **ZFC** $\nvdash \neg$**CH** 且**ZFC** $\nvdash$ **CH**.

Gödel 若**ZFC**一致，则**ZFC** + **CH**一致；

Cohen 若**ZFC**一致，则**ZFC** + $\neg$**CH**一致.

事实上，逻辑学家在分析、代数、拓扑、数论、组合数学等领域发现了大量的独立于 **ZFC**的自然数学命题。为了判定 **CH** 及这些自然的独立性命题的真值，我们需要关于无穷的新公理: 如何为集合论公理的合理性作辩护？

皮亚诺算术 **PA** 的语言包含如下非逻辑符号：个体常元符 **0**，一元函数符 **S** 和两个二元函数符 $+, \times$。**PA** 由如下语句组成：

1. $\forall x(\mathbf{0} \not\equiv \mathbf{S}x)$；
2. $\forall x \forall y(\mathbf{S}x \equiv \mathbf{S}y \to x \equiv y)$；
3. $\forall x(x + \mathbf{0} \equiv x)$；
4. $\forall x \forall y(x + \mathbf{S}y \equiv \mathbf{S}(x + y))$；
5. $\forall x(x \times \mathbf{0} \equiv \mathbf{0})$；
6. $\forall x \forall y(x \times \mathbf{S}y \equiv (x \times y) + x)$；
7. $(\phi(\mathbf{0}/x) \wedge \forall x(\phi \to \phi(\mathbf{S}x/x))) \to \forall x\phi$，其中 ϕ 是自由出现的个体变项只有 x的 **PA** 中的公式。

模型 $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$ 称为皮亚诺算术 **PA** 的标准模型；其中 S 是 $\mathbb{N}$ 上的后续函数 $(S(n) = n + 1)$；$+$ 和 $\times$ 分别是 $\mathbb{N}$ 上的加法和乘法函数。

数学家的答案 当整数 $n > 2$时，关于 x, y, z的方程
$x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解。

费马大定理的符号化 $\forall n > 2 \neg \exists x \exists y \exists z (x^n + y^n = z^n)$.

逻辑学家的答案 费马大定理在 **ZFC**中可证。

逻辑学家的问题 费马大定理在 **PA**中可证吗？

希尔伯特纲领的两个主要目标：

1. 证明 **PA**的完备性: 所有关于算术的真命题在 **PA**中可证。
2. 证明 **PA**的一致性: 用有限性推理方法证明 **PA**是一致的。

哥德尔第一不完全性定理否定了第一个目标，第二不完全性定理在一定意义上否决了第二个目标

哥德尔不完全性定理的通俗版本

哥德尔不完全性定理的通俗版本

- 不完全性定理是现代逻辑史上的一座重要里程碑，对数学、逻辑学、哲学、理论计算机科学等都产生了深刻广泛的影响。

哥德尔不完全性定理的通俗版本

- 不完全性定理是现代逻辑史上的一座重要里程碑，对数学、逻辑学、哲学、理论计算机科学等都产生了深刻广泛的影响。
- 不完全性定理粉碎了数学家两千年来的信念，揭示了形式化方法的局限性。它告诉我们，真与可证是两个概念：可证的一定是真的，但真的不一定可证。

- 不完全性定理是现代逻辑史上的一座重要里程碑，对数学、逻辑学、哲学、理论计算机科学等都产生了深刻广泛的影响。
- 不完全性定理粉碎了数学家两千年来的信念，揭示了形式化方法的局限性。它告诉我们，真与可证是两个概念：可证的一定是真的，但真的不一定可证。
- 第一不完全性定理：对任何包含足够算术的递归可公理化的形式系统 T，若它是一致的，则它不完备：存在一语句 ϕ 使得 ϕ 和 $\neg\phi$ 都在 T 中不可证。

哥德尔不完全性定理的通俗版本

- 不完全性定理是现代逻辑史上的一座重要里程碑，对数学、逻辑学、哲学、理论计算机科学等都产生了深刻广泛的影响。
- 不完全性定理粉碎了数学家两千年来的信念，揭示了形式化方法的局限性。它告诉我们，真与可证是两个概念：可证的一定是真的，但真的不一定可证。
- 第一不完全性定理：对任何包含足够算术的递归可公理化的形式系统 T，若它是一致的，则它不完备：存在一语句 ϕ 使得 ϕ 和 $\neg\phi$ 都在 T 中不可证。
- 第二不完全性定理：对任何包含足够算术的递归可公理化的形式系统 T，若它是一致的，则它的一致性在 T 中不可证。

说谎者语句与哥德尔语句

- 考虑如下语句 **L**： **L** 为假。 **L** 称为说谎者语句。
- 问题： **L**是否为真?
- 推理：**L**为真当且仅当 **L** 为假。

- 哥德尔仿照说谎者语句构造如下语句 **G**： **G**在 **PA**中不可证（哥德尔语句）．问题：哥德尔语句 **G**是否在 **PA**中可证？不同于说谎者语句，哥德尔语句并非导致矛盾。事实上，若 **PA**一致，则 **G**在 **PA**中不可证，即 **G**为真。

对不完全性定理的常见误解

日常语言中我们也常用如下词汇：一致、不一致、完备、不完备、系统等，因此哥德尔不完全性定理被广泛应用到数学外的领域中：

- 任何一致的形式系统都是不完备的
- 任何有意义的形式系统都是不完备的
- 任何关于实数的理论都是不完备的
- 任何一致的物理理论都是不完备的
- 任何一致的哲学理论都是不完备的
- 任何一致的自然语言文本都是不完备的，并非包含所有的真理
- 任何一台一致的计算机的计算能力都是有限的，因此心智超过计算机：总存在计算机不能证明但心智可证明为真的命题

哥德尔析取论题

问题

(1) 人类心智是否等价于图灵机？

(2) 是否存在绝对不可证的命题？

- 哥德尔认为人类心智并非等价于图灵机；不存在绝对不可证的命题。
- 哥德尔析取论题：若人类心智等价于图灵机，则存在绝对不可证的命题。

数理逻辑的主要分支领域

数学基础 不完全性，可证逻辑，形式真理论，逻辑悖论，反推数学，数学哲学

集合论 描述集合论，大基数，决定性公理，内模型论，组合集合论，力迫理论，点集拓扑等

模型论 模型论逻辑，抽象逻辑的模型论，递归模型论，有限模型论，代数模型论，稳定性理论

递归论 经典计算性理论，高阶递归论理论，可定义性理论，算法随机性理论

证明论 结构证明论，序数分析，证明语义学，构造性数学，类型论等

哲学逻辑分支领域

- 模态逻辑 Modal logic 动态逻辑 Dynamic logic 辩护论证的逻辑 Logic for defensible argumentation
- 偏好逻辑 Preference logic 图解逻辑 Diagrammatic logic 直觉主义逻辑 Intuitionistic Logic
- 自由逻辑 Free logic 问题逻辑 The logic of questions 相干逻辑 Relevance logic
- 时态逻辑 Tense logic 蕴涵逻辑 Implicational logic 弗协调逻辑 Paraconsistent logic
- 道义逻辑 Deontic logic 重写逻辑 Rewriting logic 多值逻辑 Many valued logic
- 认知逻辑 Epistemic logic 自然语言逻辑 Logic for natural language 因果性逻辑 Logic for causality 混合逻辑 Hybrid logic

计算机逻辑主要领域

- 逻辑编程 Logic Programming 计算性逻辑 Computational logic 自动机理论 Automata theory
- 高阶逻辑 Higher-Order Logic 自动演绎推理 Automated deduction 计算理论 Theory of computation
- 范畴逻辑 Categorical logic 数据库理论 Database theory 描述逻辑 Description logics
- 形式语义 Formal semantics 人工智能逻辑 Logic in artificial intelligence 计算复杂性 Computational complexity
- 量子逻辑 Quantum logic 编程语言 Programming language 模型检测 Model checking

现代逻辑研究极大更新和深化我们对如下哲学核心概念的理解：

现代逻辑研究极大更新和深化我们对如下哲学核心概念的理解：

- 真(Truth), 证明(Proof), 无穷(Infinity), 计算(Computation), 集合(Set), 数(Number), 可定义性(Definability)

现代逻辑研究极大更新和深化我们对如下哲学核心概念的理解：

- 真(Truth), 证明(Proof), 无穷(Infinity), 计算(Computation), 集合(Set), 数(Number), 可定义性(Definability)
- 自指(Self-reference), 不完备性(Incompleteness), 独立性(Independence), 可判定性(Decidability)

现代逻辑研究极大更新和深化我们对如下哲学核心概念的理解：

- 真(Truth)，证明(Proof)，无穷(Infinity)，计算(Computation)，集合(Set)，数(Number)，可定义性(Definability)
- 自指(Self-reference)，不完备性(Incompleteness)，独立性(Independence)，可判定性(Decidability)
- 蕴涵(Implication)，一致(Consistency)，悖论(Paradox)，矛盾(Contradiction)

现代逻辑研究极大更新和深化我们对如下哲学核心概念的理解：

- 真(Truth), 证明(Proof), 无穷(Infinity), 计算(Computation), 集合(Set), 数(Number), 可定义性(Definability)
- 自指(Self-reference), 不完备性(Incompleteness), 独立性(Independence), 可判定性(Decidability)
- 蕴涵(Implication), 一致(Consistency), 悖论(Paradox), 矛盾(Contradiction)
- 绝对性(Absoluteness), 可知性(Knowability), 必然与可能(Necessity, Possibility), 模糊性(Vagueness) etc.

哲学的一片云，逻辑的一滴水